

7. OPERAZIONI E LORO PROPRIETÀ' (proprietà che sono valide per tutti i numeri reali!)

♥ PSST ... MI RACCOMANDO ... QUESTO PARAGRAFO E' DI IMPORTANZA CAPITALE!!!

□ ADDIZIONE O SOMMA $\begin{array}{c} 8+5 = 13 \\ \uparrow \uparrow \\ \text{addendi} \quad \text{somma} \end{array}$

a) Proprietà commutativa dell'addizione:

in una somma, è possibile mutare a piacimento l'ordine degli addendi, e il risultato non cambierà.

$$8+5=5+8 \quad 5+4+3+2+10=10+2+4+5+3$$

b) Proprietà associativa dell'addizione:

data una somma di più addendi, è possibile, tramite coppie di parentesi, associare liberamente gli addendi a gruppi, perché così facendo il risultato non cambierà.

$$11+25+4=11+(25+4)=11+29=40$$

c) Proprietà dissociativa dell'addizione:

data una somma di più addendi, alcuni dei quali raggruppati fra parentesi, si possono sciogliere le parentesi, e il risultato non cambierà.

$$5+(4+3)+(2+10)=5+4+3+2+10=24$$

□ MOLTIPLICAZIONE O PRODOTTO $\begin{array}{c} 8 \cdot 5 = 40 \\ \uparrow \uparrow \\ \text{fattori} \quad \text{prodotto} \end{array}$

d) Proprietà commutativa della moltiplicazione:

in un prodotto, è possibile mutare a piacimento l'ordine dei fattori, e il risultato non cambierà.

$$8 \cdot 5 = 5 \cdot 8 \quad 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 = 10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3$$

e) Proprietà associativa della moltiplicazione:

dato un prodotto di più fattori, è possibile, tramite coppie di parentesi, associare liberamente i fattori a gruppi, perché così facendo il risultato non cambierà.

$$11 \cdot 25 \cdot 4 = 11 \cdot (25 \cdot 4) = 11 \cdot 100 = 1100$$

f) Proprietà dissociativa della moltiplicazione:

dato un prodotto di più fattori, alcuni dei quali raggruppati fra parentesi, si possono sciogliere liberamente le parentesi, e il risultato non cambierà.

$$5 \cdot (4 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 10) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 = 1200$$

g) Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:

quando si deve moltiplicare una somma per un numero (vedi esempio qui a fianco), è possibile, volendo, moltiplicare per quel numero ogni singolo addendo della somma, poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$$(5+4+3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10 + 8 + 6 = 24$$

$$10 \cdot (15+11) = 10 \cdot 15 + 10 \cdot 11 = 150 + 110 = 260$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1\right) \cdot 24 = \frac{1}{4} \cdot 24 + \frac{1}{3} \cdot 24 + 1 \cdot 24 = 6 + 8 + 24 = 38$$

$$a \cdot (b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae \quad (\text{NOTA})$$

NOTA - A 2° membro abbiamo tralasciato il puntino di moltiplicazione; clicca sulla freccia ➡ per sapere quando si suole sottintenderlo, e comunque basati sugli esempi riportati nel riquadro a destra. Anche nei casi in cui di solito il puntino viene omesso, è però lecito scriverlo ugualmente specie se si desidera dare risalto all'idea di moltiplicazione.

h) Proprietà distributiva generalizzata:

quando si deve moltiplicare una somma per un'altra somma (vedi esempio a fianco), è possibile, volendo, moltiplicare ciascun addendo della prima somma per ciascun addendo della seconda, poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$$(2+3) \cdot (4+5) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = \dots = 45$$

$$(a+b) \cdot (c+d+e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Se ho 2 astucci, in ciascuno dei quali ci sono 5 penne, 4 matite e 3 gomme, per contare il numero totale degli oggetti posso procedere in due modi:

a) contare gli oggetti di ciascun astuccio

$$5+4+3=12$$

poi moltiplicare per 2 il risultato

$$\underbrace{(5+4+3)}_{12} \cdot 2$$

b) contare prima tutte le penne $5 \cdot 2 = 10$

$$\text{poi tutte le matite } 4 \cdot 2 = 8$$

$$\text{poi tutte le gomme } 3 \cdot 2 = 6$$

e infine sommare i numeri così ottenuti:

$$\underbrace{5 \cdot 2}_{10} + \underbrace{4 \cdot 2}_{8} + \underbrace{3 \cdot 2}_{6}$$

Puntino ... sì o no ??? Esempi:

$$7 \cdot 8, 3a, a \cdot 3, xy, 5(x+2), (x+2) \cdot 5$$

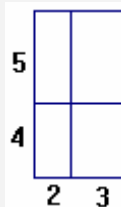
Per calcolare l'area di questo rettangolo posso procedere in due modi:

a) calcolare subito l'area totale

$$\underbrace{(2+3)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{(4+5)}_{\text{altezza}}$$

b) oppure calcolare le quattro aree parziali e poi sommarle:

$$2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$$



$$\square \text{ SOTTRAZIONE} \quad \begin{array}{c} 8 \\ \uparrow \\ \text{minuendo} \end{array} - \begin{array}{c} 5 \\ \uparrow \\ \text{sottraendo} \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ \text{differenza} \end{array}$$

La sottrazione è definita come l'operazione inversa dell'addizione.

E' quell'operazione mediante la quale, dati due numeri, se ne trova un terzo che addizionato al secondo dà come risultato il primo:

$$a - b = c \quad \text{se } c \text{ è tale che } c + b = a$$

La sottrazione NON gode

- né della proprietà commutativa $8 - 5 \neq 5 - 8$
- né della associativa/dissociativa $\underbrace{(10 - 7) - 1}_{3 - 1 = 2} \neq \underbrace{10 - (7 - 1)}_{10 - 6 = 4}$

Gode invece della seguente

i) Proprietà invariantiva della sottrazione:

in una sottrazione, è possibile, volendo, aggiungere o sottrarre uno stesso numero ad entrambi i termini (minuendo e sottraendo), e il risultato non cambierà.

$$\underbrace{43 - 27}_{16} = \begin{cases} (43 + 3) - (27 + 3) = 46 - 30 = 16 \\ (43 - 3) - (27 - 3) = 40 - 24 = 16 \end{cases}$$

$$\square \text{ DIVISIONE} \quad \begin{array}{c} 24 \\ \uparrow \\ \text{dividendo} \end{array} : \begin{array}{c} 4 \\ \uparrow \\ \text{divisore} \end{array} = \begin{array}{c} 6 \\ \text{quoziente} \end{array}$$

E' definita come l'operazione inversa della moltiplicazione. Tramite la divisione, dati due numeri, se ne trova un terzo che moltiplicato per il secondo dà come risultato il primo:

$$a : b = c \quad \text{se } c \text{ è tale che } c \cdot b = a$$

La divisione NON gode

- né della proprietà commutativa $24 : 4 \neq 4 : 24$
- né della associativa/dissociativa $\underbrace{(48 : 8) : 2}_{6 : 2 = 3} \neq \underbrace{48 : (8 : 2)}_{48 : 4 = 12}$

Gode invece delle seguenti

j) Proprietà invariantiva della divisione (o delle frazioni in senso "lato", vedi NOTA qui sopra):

in una divisione (o in una frazione), è possibile, volendo, moltiplicare o dividere per uno stesso numero (purché diverso da 0! La divisione per 0 è una operazione "non eseguibile", vedi pagina successiva) entrambi i termini (dividendo e divisore; numeratore e denominatore), e il risultato non cambierà.

$$\underbrace{30 : 6}_5 = \begin{cases} (30 \cdot 2) : (6 \cdot 2) = 60 : 12 = 5 \\ (30 : 2) : (6 : 2) = 15 : 3 = 5 \end{cases} \quad 3,2 : 0,8 = (3,2 \cdot 10) : (0,8 \cdot 10) = 32 : 8 = 4 \quad \frac{21}{28} = \frac{21^3}{28^4} \left[\frac{21 : 7}{28 : 7} \right]$$

k) Proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma:

quando si deve dividere una somma per un numero, è possibile, volendo, dividere per quel numero ciascun addendo della somma, poi addizionare i quozienti parziali così ottenuti.

$$(15 + 21 + 36) : 3 = 15 : 3 + 21 : 3 + 36 : 3 = 5 + 7 + 12 = 24 \quad \frac{40 + 12}{16} = \frac{40}{16} + \frac{12}{16}$$

$$(a + b) : c = a : c + b : c \quad \text{o anche} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad \text{OCCHIO!!! Invece } \frac{c}{a+b} \overset{\text{DIVERSO}}{\neq \text{DA}} \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \text{ !!!!}$$



l) "Per moltiplicare, o dividere, un prodotto per un numero ..."

... basta moltiplicare, o dividere, per quel numero, UNO SOLO A SCELTA fra i fattori del prodotto.

In particolare,

quando si deve dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere quel fattore.

$$(7 \cdot 5 \cdot 4) : 2 = \begin{cases} \frac{14 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 10 \cdot 4} \\ \frac{7 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 5 \cdot 8} \end{cases} \quad (10 \cdot 12) : 2 = \begin{cases} \frac{5 \cdot 12}{10 \cdot 6} \end{cases} \quad (7 \cdot 5 \cdot 3) : 5 = 7 \cdot 1 \cdot 3 = 7 \cdot 3$$

□ LA “DIVISIONE INTERA”

Così viene chiamata la divisione fra due interi, quando non si accetta un risultato frazionario, ma si vuole invece un “quoziente intero” e un resto (vedi pagina 114 per approfondimenti).

Se a, b sono due interi (con $b \neq 0$), e si intende che il simbolo “:” indichi DIVISIONE INTERA, allora

♥ $a : b = c$ quando è $c \cdot b + r = a$, con $r < b$ (a, b, c, r interi, $b \neq 0$)
divisione
intera

Notare l’**IMPORTANTISSIMA** condizione $r < b$: il resto dev’essere sempre minore del divisore.

Ad esempio, è giusto scrivere che $23 : 5 = 4$ (col resto di 3) perché $4 \cdot 5 + 3 = 23$, ed è $3 < 5$.

□ LA “LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO”

Prende il nome di “legge di annullamento del prodotto” la proposizione (= affermazione) seguente:

♥ “Se almeno uno dei fattori di un prodotto è 0, allora il prodotto vale 0;
e viceversa, se un prodotto è uguale a 0, allora sarà uguale a 0 almeno uno dei fattori”.

□ GLI “ELEMENTI NEUTRI” DELLA SOMMA E DEL PRODOTTO

Si dice che lo zero (0) è “l’elemento neutro (= ininfluente) della somma”

per indicare che, sommato a qualsiasi numero, lo lascia invariato: $\forall x, x + 0 = x$ ($\forall$ significa “per ogni”).

Si dice che il numero 1 è “l’elemento neutro del prodotto”

per indicare che, moltiplicato per qualsiasi numero, lo lascia invariato: $\forall x, x \cdot 1 = x$.

In relazione al prodotto, 0 si comporta invece da “elemento assorbente”, perché $\forall x, x \cdot 0 = 0$.

Osserviamo a proposito che l’operazione di addizione non possiede alcun “elemento assorbente”.

□ IL PROBLEMA DELLA DIVISIONE PER ZERO

La **divisione** (stiamo ora parlando della divisione “ordinaria”, NON della “divisione intera”)

è definita come l’operazione inversa della moltiplicazione, ossia come l’operazione per cui, dati

due numeri a, b , si trova quel terzo numero c il quale, se moltiplicato per b , restituisce come risultato a .

$$a : b = c \text{ se } c \text{ è quel numero tale che } c \cdot b = a$$

♥ Consideriamo ora, ad esempio, la divisione $1 : 0$.

Essa “ci chiede” di determinare un numero tale che, moltiplicato per 0, dia come risultato 1;
ma un numero siffatto NON ESISTE, in quanto ogni numero, quando viene moltiplicato per 0,
dà sempre risultato 0 e quindi non potrà mai dare 1.

Perciò l’operazione $1 : 0$ è IMPOSSIBILE, ossia PRIVA DI RISULTATO.

E’ ovvio che alla stessa conclusione saremmo giunti considerando le operazioni $5 : 0$; $7 : 0$; $4,21 : 0$; ...

♥ Se invece consideriamo l’operazione $0 : 0$, questa “ci chiede” di determinare un numero tale che,
moltiplicato per 0, dia come risultato 0; ma QUALSIASI numero gode di questa proprietà!

Perciò l’operazione $0 : 0$ è INDETERMINATA, nel senso che non ha un risultato ben determinato, ma
potrebbe avere infiniti risultati, perché qualunque numero potrebbe “pretendere” di esserne il risultato.

♥ Infine, $0 : 1 = 0$ (operazione “normale”; esiste uno e un sol numero che moltiplicato per 1 dia 0, ed è lo 0)



R I A S S U N T O	Indicato con a un qualsiasi numero non nullo,	$a : 0 = \frac{a}{0} = \text{IMPOSSIBILE}$	operazioni “non eseguibili”, in inglese “ILLEGAL” (= illecite)
		$0 : 0 = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINATA}$	
		$0 : a = \frac{0}{a} = 0$	

□ 1/0 UGUALE “INFINITO” ???

Forse da qualche parte ti sarà capitato di leggere che $\frac{1}{0} = \infty$ (il simbolo ∞ sta per “infinito”).

La scrittura $1/0 = \infty$ va correttamente interpretata.

Essa compare nello studio dei “limiti” (a livello pre-universitario), e comunque, semplificando un poco, si può dire che è sostanzialmente un modo conciso per esprimere il concetto seguente:

Se prendiamo una frazione che abbia 1 a numeratore, e facciamo “tendere a zero il denominatore”,
ossia facciamo assumere al denominatore valori piccolissimi, vicinissimi a zero,
allora il risultato assumerà valori grandissimi, “tendenti a infinito”.

$$\frac{1}{0,1} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 1 \cdot 10 = 10 \quad \frac{1}{0,01} = 100 \quad \frac{1}{0,001} = 1000 \quad \frac{1}{0,000001} = 1000000 \quad \text{ecc. ecc.}$$