

10. ESERCIZI

A) ESERCIZI SU DIVISIBILITA', MULTIPLI, DIVISORI, NUMERI PRIMI ECC. (risposte a pag. 23)

1) VERO O FALSO?

- | | | | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|--------------------------|---|---|---|-------------------------|---|---|---|
| a) $3:0=0$ | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | d) Il numero 0 è pari | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | e) Il numero 1 è primo | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| b) $0:3=0$ | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | e) Il numero 1 è dispari | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | h) 0 divide ogni numero | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| c) $0:0=1$ | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | f) Il numero 0 è primo | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | i) 1 divide ogni numero | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |

2) VERO O FALSO?

Se $m \cdot n = p$ (essendo m, n, p tre interi non nulli), allora

- | | | | | | | | | | | | |
|--|---|---|---|-----------------------------|---|---|---|-----------------------------|---|---|---|
| a) n è multiplo di p | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | c) n è divisore di p | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | e) p è divisibile per n | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| b) p è multiplo di n | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | d) n è divisibile per p | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | f) $p:m=n$ | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| g) Se a è divisibile per b , allora è divisibile anche per tutti i divisori di b | | | | | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| h) Se un intero è divisibile sia per 6 che per 8, allora è certamente divisibile per 48 | | | | | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| i) Due numeri entrambi primi sono sempre anche primi fra loro | | | | | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |
| l) Se a è primo con b e b è primo con c , allora a sarà certamente primo con c | | | | | <table border="1"><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> | V | F | | | | |
| V | F | | | | | | | | | | |

VERIFICARE SE UN INTERO E' PRIMO, SENZA SPRECARE CALCOLI

Supponiamo di prendere un intero n con l'intenzione di verificare se è primo o se non lo è.

E supponiamo di aver constatato che:

2 non è divisore di n ; 3 non è divisore di n ; 5 non lo è; ... nessun numero primo $\leq \sqrt{n}$ è divisore di n .

Allora ti dico che sarebbe inutile continuare:

n , se non ha divisori primi \leq della sua radice quadrata, è CERTAMENTE un numero primo!

Infatti: se un intero n ha un divisore proprio (NOTA) d maggiore della sua radice quadrata, allora ammette di certo anche un altro divisore proprio, ossia $n:d$, che è minore di \sqrt{n} ; quindi, se non si è trovato nessun divisore proprio di n che sia $\leq \sqrt{n}$, si può essere certi che n non ha alcun divisore proprio:

se infatti, per assurdo, ne avesse uno $> \sqrt{n}$, se ne sarebbe già dovuto trovare un altro $< \sqrt{n}$.

NOTA: i divisori "propri" di un intero sono quelli "non banali", ossia diversi da 1 e dal numero stesso.

La ricerca dei divisori propri di n si può poi limitare ai soli divisori primi, perché se un intero ha un divisore proprio k non primo, certamente ha anche uno o più divisori primi inferiori a k .

♥ Ad esempio, per concludere che 97 è un numero primo

basta aver verificato che non è divisibile per nessuno dei numeri 2, 3, 5, 7.

Infatti, il tentativo successivo sarebbe per 11, ma 11 supera già $\sqrt{97} = 9,...$

3) Per verificare se sia primo il 1231,

la ricerca di eventuali divisori potrà limitarsi ai numeri primi non superiori a

IL "CRIVELLO DI ERATOSTENE"

Un modo semplice per ricavare l'elenco dei numeri primi non superiori ad un dato intero n è il seguente.

Si scrivono gli interi da 2 a n , poi dallo schema

- si cancellano tutti i multipli di 2 (escluso il 2);
- si cerca il primo numero successivo al 2 non ancora cancellato, ossia il 3, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il 3);
- si cerca il primo numero successivo al 3 non ancora cancellato, ossia il 5, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il 5);
- si cerca il primo numero successivo al 5 non ancora cancellato, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il numero stesso);
- ...

Ciò che resta al termine del procedimento è l'elenco dei numeri primi cercato.

4) Serviti di questo metodo e dello schema che segue, per determinare i numeri primi non superiori a 125:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125

- 5) Per ciascuno degli interi che seguono, stabilisci se è divisibile per:
 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
 a) 378 b) 825 c) 420 d) 988 e) 14641 f) 84 g) 5929 h) 437 i) 318 l) 1000001

NUMERI “PERFETTI”

Si dice “perfetto” un intero, che sia uguale alla somma dei suoi divisori, inclusa l’unità ma escluso il numero stesso.

Ad esempio, sono numeri perfetti $6 = 1 + 2 + 3$ e $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

- 6) Il numero perfetto successivo a 28 è compreso fra 495 e 500. Quanto vale?

6
28
?
8128
130816
2096128

DIVISIONE INTERA, CON RESTO

♥ In Informatica, ma anche in Matematica, si utilizzano due “operatori” specifici, DIV e MOD, per indicare rispettivamente il **quoziente intero (DIV)** e il **resto (MOD)** della **divisione intera**. E’ fondamentale tener presente che **il resto è sempre minore del divisore!**

Esempi: $13 \text{ DIV } 5 = 2$; $13 \text{ MOD } 5 = 3$; $12 \text{ DIV } 3 = 4$; $12 \text{ MOD } 3 = 0$; $7 \text{ DIV } 8 = 0$; $7 \text{ MOD } 8 = 7$

- 7) a) $7 \text{ DIV } 3 = \dots$ $7 \text{ MOD } 3 = \dots$ b) $18 \text{ DIV } 3 = \dots$ $18 \text{ MOD } 3 = \dots$ c) $2 \text{ DIV } 4 = \dots$ $2 \text{ MOD } 4 = \dots$
 d) $89 \text{ DIV } 7 = \dots$ $89 \text{ MOD } 7 = \dots$ e) $5 \text{ DIV } 1 = \dots$ $5 \text{ MOD } 1 = \dots$ f) $5 \text{ DIV } 0 = \dots$ $5 \text{ MOD } 0 = \dots$
 g) Se si sa che $a \text{ MOD } b = 0$, si può dire che b è di a
 h) $x \text{ DIV } 29 = 7$, $x \text{ MOD } 29 = 15$. $x = ?$ i) $73 \text{ DIV } y = 6$, $73 \text{ MOD } y = 1$. $y = ?$
 l) The Centre for Education in Math. and Computing, www.cemc.uwaterloo.ca, Pascal Contest 2011
 When the integer N is divided by 60, the remainder (*resto*) is 49.
 When N is divided by 15, the remainder is: 0? 3? 4? 5? 8?

- 8) Nella dispensa di un asilo sono rimasti 60 cioccolatini, 72 biscotti e 24 piccole crostate. Si decide di “far fuori” questo materiale, prossimo alla scadenza, distribuendo ai bambini più meritevoli un “kit” formato da x crostatine + y cioccolatini + z biscotti (tutti i “kit” dovranno essere fra loro identici), e ci si chiede: quale sarà il massimo numero di kit realizzabili in tale modo?
- 9) Una cometa periodica si presenta a distanza di esattamente 56 anni, e un’altra a distanza di 48. Se quest’anno le due comete si sono mostrate simultaneamente, fra quanti anni l’evento si ripresenterà?
- 10) Se ci sono tre funi di lunghezza 126, 168 e 140 cm, e si desidera tagliarle in modo da ottenere il numero più piccolo possibile di pezzi di ugual lunghezza (senza buttar via alcun pezzo di corda), quale sarà questo numero minimo?
- 11) Anna e Bruno sono due pazientissimi operatori in un call center. Hanno a disposizione lo stesso interminabile elenco di numeri telefonici fra cui scegliere quelli da comporre, e Anna ha deciso di selezionare una persona ogni 12, mentre Bruno intende prendere un nominativo ogni 20. Se in questo modo la persona al posto x dell’elenco viene interpellata sia da Anna che da Bruno, anche la persona al posto $x + y$ sarà contattata 2 volte ... Quanto vale, al minimo, y ?
- 12) Se si sa che il mcm e il MCD di due numeri valgono, rispettivamente, 72 e 6, ma i due numeri in gioco NON sono 72 e 6, di che numeri si tratta?
- 13) Rebecca has 20 table tennis balls and 16 table tennis paddles. She wants to sell packages of balls and paddles bundled together. What is the greatest number of packages she can sell with no leftover balls or paddles? (dal sito <http://tulyn.com>)
- 14) Ho guarnito il mio albero di Natale con 4 festoni luminosi. Nei festoni, le lampadine mandano un lampo di luce a intervalli di: 5, 6, 8 e 10 secondi rispettivamente. Se alle ore 23 in punto hanno emesso la loro luce simultaneamente, quante altre volte accadrà la stessa cosa entro le 24?
- 15) Si vuole lastricare un rettangolo di cortile di metri 3,90 X 2,34, utilizzando piastre di porfido quadrate, il cui lato sia di lunghezza (in cm) intera, e il più lungo possibile. Quanti cm^2 misurerebbe la superficie occupata da ciascuna piastra?
- 16) Una bicicletta per bambini ha la ruota anteriore di raggio 20 cm, e quella posteriore di raggio 12 cm. Se ad un certo istante la valvola per gonfiare le ruote si trova, in entrambe, nella stessa posizione (ad es., in alto), dopo quanti giri della ruota più grande si verificherà nuovamente la stessa situazione?

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA (risposte a pag. 23)**Riconosci l'affermazione esatta, che è una e una sola, fra quelle proposte.**

- 1) Posso dire con sicurezza che un numero è divisibile per 6:
 - a) se so che la somma delle sue cifre è divisibile per 6
 - b) se so che è pari, e la somma delle sue cifre è un multiplo di 9
 - c) se so che le ultime sue due cifre formano un numero divisibile per 6
 - d) in nessuno dei casi precedenti
- 2) Quale fra i seguenti numeri NON è multiplo sia di 4, che di 5, che di 6?
 - a) 1234560 b) 7654320 c) 4321000 d) 1425360
- 3) Se due interi a, b sono primi fra loro, allora una sola delle seguenti affermazioni è FALSA. Quale?
 - a) il loro M.C.D. è 1
 - b) il loro m.c.m. è uguale al loro prodotto
 - c) la frazione a/b non è semplificabile
 - d) almeno uno di essi deve essere un numero primo
- 4) Riconosci l'unica affermazione FALSA.
Se p è un numero primo, allora:
 - a) il successivo di p non è mai un numero primo
 - b) il quadrato di p ha sempre 3 divisori
 - c) p ha tanti divisori quanti ne ha un altro qualsiasi numero primo
- 5) In quanti modi il numero 10230 è esprimibile come prodotto di 4 interi, tutti diversi da 1?
 - a) 7 b) 8 c) 9 d) 10
- 6) Il M.C.D. di tre numeri, tutti diversi fra loro, è 3. Allora certamente:
 - a) nessuno dei tre numeri è primo
 - b) almeno uno ha un divisore primo diverso da 3
 - c) i tre numeri sono tutti dispari
 - d) i tre numeri non sono tutti pari
- 7) Il m.c.m. di due interi è 216. Allora una delle seguenti affermazioni è FALSA. Quale?
 - a) I due numeri non possono essere entrambi dispari
 - b) I due numeri possono non essere entrambi pari
 - c) Uno dei due numeri deve essere multiplo di 4
 - d) Uno dei due numeri deve essere multiplo di 6
- 8) Una sola fra le seguenti terne di numeri ha per m.c.m. 72 e per M.C.D. 1. Quale?
 - a) 8, 9, 36 b) 3, 18, 72 c) 8, 18, 72 d) 4, 9, 18
- 9) Si sa che Andrea ha 5 volte gli anni di Bruno, e 3 volte gli anni di Carlo.
Se Carlo ha meno di 15 anni, quanti anni può avere, al massimo, Bruno?
 - a) 4 b) 5 c) 6 d) nessuna delle risposte precedenti è corretta
- 10) Per quale intero, al minimo, devo moltiplicare il numero 91, se voglio che il risultato della moltiplicazione sia un multiplo di 98?
 - a) 7 b) 14 c) 28 d) 49
- 11) Un intero a , quando viene diviso per 24, dà come resto 5.
Se b è il più piccolo multiplo di 12 maggiore di a , allora la differenza $b - a$ vale:
 - a) 5 b) 7 c) 19 d) Non si può determinare con sicurezza
- 12) Nel numero $99986x4$, determina la cifra mancante sapendo che il numero stesso è divisibile per 12.
 - a) $x = 0$ b) $x = 4$ c) Il problema è impossibile
 - d) Non si può determinare con certezza, c 'è più di un valore possibile per x
- 13) Nel seguente numero: $52x34866$, il simbolo x indica la terza cifra da sinistra.
Determina x in modo che il numero sia divisibile per 33.
 - a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) Il problema è impossibile
 - d) Non si può determinare con certezza, c 'è più di un valore possibile per x
- 14) Fra i numeri n di quattro cifre tali che $n^2 + 7$ è divisibile per 7, qual è il più piccolo?
 - a) 1001 b) 1007 c) 1008 d) 1010



RISPOSTE, RISULTATI DEGLI ESERCIZI SULLA DIVISIBILITÀ E SUI NUMERI PRIMI

- 1) a) F La divisione, in matematica, è intesa come l'operazione inversa della moltiplicazione.
 Il motivo per cui, ad esempio, si ha $28 : 4 = 7$,
 è che il 7, se venisse moltiplicato per 4, restituirebbe il 28!
 $28 : 4 = 7$ per il fatto che $7 \cdot 4 = 28$.
 Insomma, $a : b = c$ se, e soltanto se, risulta $c \cdot b = a$.
 Consideriamo ora l'operazione $3 : 0$.
 $3 : 0 = ?$
 Dovremmo trovare un numero che moltiplicato per 0 dia 3 ... ma non lo troveremo mai!
 Un numero siffatto non esiste, perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà sempre e soltanto 0.
 Allora l'operazione $3 : 0$ è IMPOSSIBILE, è priva di risultato!
 Non c'è nessun numero che possa, diciamo così, "pretendere di esserne il risultato".
- b) V
- c) F L'operazione $0 : 0$ è considerata "non eseguibile", perché sarebbe "indeterminata",
 in quanto qualunque numero potrebbe "pretendere di esserne il risultato".
 Infatti $a : b = c$ quando $c \cdot b = a$,
 ma nel caso della $0 : 0$ qualunque numero, moltiplicato per 0 (divisore), darebbe 0 (dividendo)!
- d) V, il numero 0 è considerato "pari" e) V f) F g) F, un numero primo deve essere maggiore di 1
 h) F "Divide" significa "è divisore di": ma la divisione per 0 è operazione "non eseguibile" i) V
- 2) a) F b) V c) V d) F e) V f) V
 g) V h) F. Controesempi: 24, 72, ... i) V l) F. Controesempio: $a = 15, b = 16, c = 35$
- 3) Non superiori a 35
- 4) L'elenco dei numeri primi non superiori a 125 è il seguente: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31
 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113
- 5) Dopo aver risposto utilizzando i Criteri di divisibilità, o, nel caso del divisore 13, effettuando
 direttamente la divisione, un modo per controllare la correttezza delle risposte date è di prendere
 una calcolatrice per constatare se, dividendo, si ottiene un intero oppure un numero con la virgola.
- 6) $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$
- 7) a) $7 \text{ DIV } 3 = 2 \quad 7 \text{ MOD } 3 = 1$ b) $18 \text{ DIV } 3 = 6 \quad 18 \text{ MOD } 3 = 0$
 c) $2 \text{ DIV } 4 = 0 \quad 2 \text{ MOD } 4 = 2$ d) $89 \text{ DIV } 7 = 12 \quad 89 \text{ MOD } 7 = 5$
 e) $5 \text{ DIV } 1 = 5 \quad 5 \text{ MOD } 1 = 0$ f) $5 \text{ DIV } 0, 5 \text{ MOD } 0$ non sono eseguibili
 g) Se $a \text{ MOD } b = 0$, si può dire che b è divisore di a
 h) $x = 7 \cdot 29 + 15 = 218$ i) $6 \cdot y + 1 = 73 \rightarrow y = 12$ l) 4
- 8) 12 kit al massimo, ciascuno con 5 cioccolatini, 6 biscotti, 2 crostatine
- 9) Fra 336 anni
- 10) $9 + 12 + 10 = 31$ pezzi da 14 cm ciascuno
- 11) y vale al minimo 60
- 12) 18 e 24
- 13) 4
- 14) $3600 : 120 = 30$ volte
- 15) 6084 cm^2
- 16) Dopo 3 giri della ruota più grande

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA di pagina 22

- 1) b) (essere multiplo di 9 implica essere multiplo di 3 ...)
 2) c) (4321000 non è divisibile per 3, quindi neppure per 6)
 3) d) 4) a) il successivo di 2 (che è un numero primo) è 3, altro numero primo 5) d) 6) d) 7) d) 8) a)
 9) c) Se il triplo dell'età di Carlo è uguale a 5 volte l'età di Bruno, allora il triplo dell'età di Carlo
 dovrà essere un numero divisibile per 5, quindi l'età di Carlo stessa dovrà essere divisibile per 5.
 Il più grande numero <15 divisibile per 5 è 10;
 Carlo potrà dunque, al massimo, avere 10 anni, Andrea 30 anni, Bruno 6 anni.
- 10) b) 11) b) 12) d) (x potrebbe valere 0 oppure 6) 13) c)
 14) a) $n^2 + 7$ è divisibile per 7 se e solo se n^2 è divisibile per 7. Ed n^2 è divisibile per 7 se e solo se lo è n .
 Allora si tratta di cercare il più piccolo numero di 4 cifre divisibile per 7, che risulta essere 1001.