CENNI DI LOGICA (PARTE 1)

1. PROPOSIZIONI E CONNETTIVI LOGICI

“Proposizione” = “affermazione”, “frase per la quale abbia senso chiedersi se sia vera o falsa”.

Esempi:

1. L’uomo è disceso la prima volta sulla Luna nel 1969 (Vera).
2. Il numero 413 è primo (Falsa).

Nella lingua parlata o scritta si utilizzano diverse
costruzioni linguistiche per mettere in relazione tra loro le proposizioni. Le principali sono

- **e**
- **o, oppure**
- **non**
- **se … allora …**
- **se … allora … e viceversa**

Esempi:

3. Il gatto è un mammifero **E** la balena è un pesce.
4. La Juventus ha vinto il campionato del 1985/86 **O** il campionato del 1986/87.
5. Il numero 413 **NON** è primo.
6. **SE** Dante Alighieri è morto prima del 1300,
   ALLORA la Divina Commedia è stata scritta prima del 1300.
7. **SE** il mio anno di nascita è un numero divisibile sia per 2 che per 3,
   ALLORA il mio anno di nascita è divisibile per 6, **E VICEVERSA**.

In Logica tali costruzioni linguistiche vengono schematizzate tramite i “connettivi logici”.
A partire da due proposizioni p, q, i connettivi consentono di creare le **proposizioni “composte”**:

$p \wedge q$	**p ET q (congiunzione)**
$p \vee q$	**p VEL q (disgiunzione)**
$\overline{p}$, $\neg p$, $\sim p$	**NON p (negazione)** *La negazione può essere indicata in tre modi alternativi*
$p \to q$	**p IMPLICA q; SE p, ALLORA q (implicazione)**
$p \leftrightarrow q$	**p BIIMPLICA q; SE p, ALLORA q E VICEVERSA (biimplicazione, doppia implicazione)**

La corretta interpretazione dei tre connettivi ET, VEL, NON
è descritta dalle rispettive TAVOLE DI VERITA’ qui sotto riportate:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

ET ($\wedge$) è anche detto “prodotto logico”,
e a volte lo si trova indicato con lo stesso simbolo
che si usa per la moltiplicazione:
“ $\cdot$ ” (eventualmente sottinteso).

VEL ($\vee$) è anche detto “somma logica”,
e può essere indicato con notazione additiva: “ + ”

Riassumendo:

- **il connettivo $\wedge$ (ET) lega due proposizioni p, q producendo una proposizione composta $p \wedge q$ che è considerata**
  - **VERA soltanto quando sono vere ENTRAMBE le proposizioni componenti p, q**
  - **altrimenti è considerata FALSA;**
- **il connettivo $\vee$ (VEL) lega due proposizioni p, q producendo una proposizione composta $p \vee q$ che è considerata**
  - **VERA purché sia vera ALMENO UNA delle proposizioni componenti p, q**
  - **mentre è considerata FALSA soltanto quando p, q sono entrambe false;**
- **il connettivo NON viene applicato ad una singola proposizione, e produce una nuova proposizione il cui valore di verità è opposto rispetto a quello della proposizione iniziale.**

Esempio: nel caso sia $p =$ "Roma è la capitale d'Italia" (Vera); $q = "2+2=5"$ (Falsa)
avremo: $p \wedge q$ FALSA, $p \vee q$ VERA, $\overline{p}$ FALSA, $\overline{q}$ VERA

♥ **La tavola di verità per il connettivo $\vee$ stabilisce che la comunità dei matematici assegna ad esso il significato di "o" inteso in senso INCLUSIVO, proprio come il VEL latino, e *NON* di un "o" ESCLUSIVO (in Latino, AUT).**

- Ad esempio, la proposizione
  "*Le darò un bacio o una carezza*"
  (che evidentemente non esclude la possibilità di entrambe le cose!)
  può essere pensata come la DISGIUNZIONE INCLUSIVA delle due proposizioni
  $b =$ "*le darò un bacio*"; $c =$ "*le darò una carezza*"
  e si tradurrà quindi in linguaggio logico con $b \vee c$.

- Invece se consideriamo la proposizione
  "*Alla fine dell'anno scolastico o resterò promosso o andrò a fare il manovale*"
  e indichiamo con p, m rispettivamente le due proposizioni
  $p =$ "*resterò promosso*"; $m =$ "*andrò a fare il manovale*"
  una traduzione col VEL non sarebbe accurata, in quanto l'affermazione evidentemente significa che si verificherà UNA E UNA SOLA delle due circostanze INCOMPATIBILI p, m.
  Avremmo quindi bisogno, per una traduzione fedele, di un connettivo di "disgiunzione esclusiva", che in effetti in Logica esiste, seppure sia poco usato, e può essere espresso, ad esempio, col simbolo XOR (dall'inglese "eXclusive OR").
  … Ma possiamo anche fare a meno di un nuovo connettivo, e tradurre così: $\boxed{(p \wedge \overline{m}) \vee (\overline{p} \wedge m)}$

2. PROPOSIZIONI LOGICAMENTE EQUIVALENTI

Siano p, q due proposizioni. Consideriamo ora le proposizioni composte

1) $\overline{p \wedge q}$
2) $\overline{p} \vee \overline{q}$

Bene, io dico che esse *hanno certamente lo stesso "valore di verità"*:
o sono entrambe vere, oppure sono entrambe false.
Infatti:

- se è vera la 1), che è la negazione della proposizione $p \wedge q$, allora significa che è falsa la $p \wedge q$, quindi che è falsa almeno una fra le due proposizioni p, q.
  Ma allora almeno una fra $\overline{p}, \overline{q}$ è vera, quindi è vera la 2).
- E, viceversa: se è vera la 2), allora è vera almeno una fra le due proposizioni $\overline{p}, \overline{q}$;
  quindi, è falsa almeno una fra le due proposizioni p, q;
  perciò, è certamente falsa la congiunzione $p \wedge q$; per cui la sua negazione $\overline{p \wedge q}$, ossia la 1), è vera.

Due proposizioni composte, costituite dalle stesse proposizioni componenti
(collegate, però, in modo diverso dai connettivi logici),
si dicono "logicamente equivalenti" se assumono sempre lo stesso valore di verità, qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti.

E' molto interessante scoprire coppie di proposizioni logicamente equivalenti.
Per verificare se due proposizioni sono logicamente equivalenti, possiamo servirci delle "tavole di verità" dei vari connettivi logici.

Ad esempio, andiamo a verificare l'equivalenza logica $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ con l'uso delle tavole
(il simbolo "=" va qui interpretato e letto come "logicamente equivalente a"):

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	**F**	V	V	F	F	**F**
V	F	F	**V**	V	F	F	V	**V**
F	V	F	**V**	F	V	V	F	**V**
F	F	F	**V**	F	F	V	V	**V**

ALCUNE EQUIVALENZE LOGICHE NOTEVOLI

(il simbolo “ = ” va interpretato e letto come “logicamente equivalente a”)

$\overline{\overline{p}} = p$ Legge della doppia negazione, o “legge di complementarietà”: “**due negazioni affermano**”

$p \wedge q = q \wedge p\,;\quad p \vee q = q \vee p$ Proprietà **commutativa** della congiunzione e della disgiunzione

$p \wedge p = p\,;\quad p \vee p = p$ Proprietà di **idempotenza** della congiunzione e della disgiunzione

$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)\,;\quad (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ Proprietà **associativa** di congiunzione e disgiunzione

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \\ \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}\end{array}}$$

LEGGI DI DE MORGAN (Importantissime !!! Confrontale con le analoghe per gli INSIEMI di pag. 89)

$p \wedge (p \vee q) = p\,;\quad p \vee (p \wedge q) = p$ Leggi di **assorbimento**

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Proprietà **distributiva** della congiunzione rispetto alla disgiunzione …
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ … e proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione

Osserviamo che $\wedge$ viene anche detto “prodotto logico” per via di certe sue affinità con il prodotto fra numeri, $\vee$ viene anche detto “somma logica” perché presenta alcune somiglianze con la somma fra numeri (per cogliere queste analogie, immagina di sostituire nelle rispettive tavole di verità “V” con “1” e “F” con “0”).

Se però proviamo a giocare con le due formule precedenti, trasformando il simbolo $\wedge$ in $\bullet$, il simbolo $\vee$ in $+$, e pensando di avere tre numeri a, b, c anziché tre proposizioni p, q, r, otterremo le due relazioni

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $\cancel{a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)}$, *la prima giusta*, ma *la seconda sbagliata*.

Insomma: in Logica valgono ENTRAMBE le proprietà distributive, sia quella della congiunzione rispetto alla disgiunzione, sia quella della disgiunzione rispetto alla congiunzione, mentre in Algebra vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma ma NON quella della somma rispetto al prodotto.

Esercizio 1. Serviti della tabella seguente per verificare la seconda legge di De Morgan $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Esercizio 2. Verifica, con la tabella, la proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Esercizio 3. Verifica la validità di alcune, a tua scelta, fra le equivalenze logiche riportate in questa pagina.

3. … E L’IMPLICAZIONE?

Ci siamo occupati, fin qui, di CONGIUNZIONE (et), DISGIUNZIONE (vel) e NEGAZIONE (non).
Per quanto riguarda l’implicazione e la biimplicazione, il discorso si prospetta molto più difficile: è infatti assai problematico decidere se per questi connettivi logici, ben più complessi dei precedenti, abbia ancora senso fissare delle “tavole di verità”.
Ne riparleremo più avanti, nella Parte 2 (pag. 350 e seguenti) di questi Cenni di Logica.

4. SIMBOLI LOGICI DI USO COMUNE

Il “QUANTIFICATORE UNIVERSALE” $\forall$ **(per ogni, per qualsiasi, qualunque sia)**	**Il “QUANTIFICATORE ESISTENZIALE”** $\exists$ **(esiste)** $\nexists$ **non esiste;** $\exists!$ **esiste uno e un solo**	**Il simbolo “TALE CHE”** **/ oppure** $\vert$ **o :**