

15. INSIEMI INFINITI

Quando abbiamo introdotto il concetto di “numero intero”, abbiamo scritto così:

“si dice «numero intero» quell’entità astratta, quel «quid», che è comune a tutti gli insiemi, i quali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un insieme dato (PURCHE’ QUESTO NON SIA INFINITO)”.

Ma cosa vuol dire, per un insieme, “essere infinito”?

Facciamo alcuni esempi e controesempi.

- *I multipli di 5 (ossia i numeri 5, 10, 15, 20, ...) costituiscono un insieme **infinito**.*
- *Una retta è un insieme **infinito** di punti.*
- *Invece l’insieme degli abitanti della Cina **non** è infinito.*
Allo stesso modo, l’insieme i cui elementi sono gli atomi di ferro della Tour Eiffel di Parigi è formato da un numero colossale, ma pur sempre finito, di elementi.

Come possiamo, dunque, spiegare in astratto cosa si intende per “insieme infinito” ?

Un modo “ingenuo” sarebbe di scrivere che un insieme si dice:

- “finito”, se i suoi elementi si possono contare esaurendo l’operazione del contare;
- “infinito”, in caso contrario.

Il guaio è che così, a ben guardare, entreremmo in un “**circolo vizioso**”!

Infatti, se per definire cosa si intenda per “numero intero”

io devo specificare che l’insieme di riferimento “non deve essere infinito”,

allora **il concetto di “insieme infinito” deve essere già stato acquisito,**

nel momento in cui si va a definire il concetto di “numero intero”:

non è dunque logicamente corretto pretendere di dar la definizione di “insieme infinito”

utilizzando il procedimento del “contare”, che invece presuppone

di avere già formulato **in precedenza** la definizione di “numero intero”!

Possiamo uscire, brillantemente, dalla situazione di stallo

ricorrendo al semplice ma potente strumento concettuale delle “corrispondenze biunivoche”

ANCHE per dare la definizione di “insieme infinito”.

Già Galileo Galilei (1564-1642) si accorse di una curiosissima, sorprendente situazione (“**paradosso di Galileo**”):

- **l’insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ dei naturali non nulli**
- **e l’insieme $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ dei naturali non nulli pari,**
il quale è soltanto una parte di A, è solo un “pezzo” di A e non “riempie” tutto A,
possono essere messi in corrispondenza biunivoca fra loro!

Certo: basta far corrispondere ad ogni elemento di A il suo doppio, e inversamente ad ogni elemento di B la sua metà, e il gioco è fatto!

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
B	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...

Ad ogni “asola” dell’insieme A corrisponde uno e un solo “bottono” dell’insieme B, e viceversa: quindi effettivamente la corrispondenza è **biunivoca**.

Il fatto che A e B si possano porre in corrispondenza biunivoca tra loro ci dice che in qualche modo (tante asole, altrettanti bottoni) gli elementi di B sono “*tanti quanti* gli elementi di A”.

Eppure B è ottenibile prendendo A e *togliendogli* degli elementi! Insomma,

se partiamo da A e gli togliamo degli elementi (i numeri dispari), la “numerosità” di A non cambia!!!

Ma è proprio questo fatto così bizzarro, l’esistenza di insiemi

i quali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con un “pezzo” di sé stessi,

che può essere sfruttato per dare una “caratterizzazione” degli insiemi infiniti,

voglio dire: per stabilire un criterio che permetta di distinguere

gli insiemi infiniti dagli altri che infiniti non sono.

DEFINIZIONE

Un INSIEME si dice “INFINITO”

se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua “parte propria”,
cioè con un suo sottoinsieme, che non “riempie” tutto l’insieme di partenza.

Facciamo un altro esempio.

Sia \overline{AB} un segmento, pensato come l'insieme dei suoi punti.

Faremo vedere che \overline{AB} è un insieme infinito, secondo la definizione appena posta.

Possiamo procedere, ad esempio, così:

costruiamo un triangolo ABC che abbia \overline{AB} come lato.

Siano M, N i punti medi dei lati AC e BC ,

e sia \overline{DE} il segmento avente per estremi i punti ottenuti calando da M e da N le perpendicolari su \overline{AB} .

Bene!

Faremo ora vedere che l'intero segmento \overline{AB}

si può mettere in corrispondenza biunivoca con il segmento \overline{DE} ,

che costituisce soltanto un "pezzo" di \overline{AB} . Infatti:

sia P un qualsiasi punto di \overline{AB} ;

congiungiamo P con C , e indichiamo con Q il punto in cui tale congiungente taglia \overline{MN} ;

caliamo da Q la perpendicolare ad \overline{AB} fino ad incontrare \overline{AB} in P' .

OK, diremo che al punto P (che sta sul segmento \overline{AB}) corrisponde il punto P' appartenente a \overline{DE} ; e che, viceversa, al punto P' corrisponde P (se si parte da P' si può ritornare a P alzando la perpendicolare ad \overline{AB} fino a incontrare \overline{MN} in Q , poi congiungendo C con Q e prolungando CQ fino a raggiungere \overline{AB}).

Sei convinto che in questo modo resta stabilita una corrispondenza biunivoca tra \overline{AB} ,

pensato come l'insieme dei suoi punti, e \overline{DE} , che è soltanto una "parte propria" di \overline{AB} ?

Controlla bene che effettivamente è così, prendendo P in varie posizioni su \overline{AB} e constatando che

il procedimento grafico indicato porta sempre ad "abbinare" a P uno e un solo punto P' , appartenente a \overline{DE} ; prendi poi P' in varie posizioni su \overline{DE} e verifica che il procedimento grafico inverso permette di risalire ad uno e un solo punto P , appartenente ad \overline{AB} .

Dunque il segmento \overline{AB} è un insieme infinito,

perché, come abbiamo fatto vedere, può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

Ricapitoliamo, e riordiniamo le idee.

- Un insieme si dice "infinito" se è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una sua "parte propria", cioè con un suo sottoinsieme, che non "riempie" tutto l'insieme di partenza.
- Si dice "numero intero" quell'entità astratta, quel "quid", che è comune a tutti gli insiemi, i quali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un insieme dato (purché questo non sia infinito).

GRADI DI INFINITO SEMPRE PIU' ALTI

A questo punto è abbastanza istintivo essere indotti a pensare che, presi due qualsiasi insiemi infiniti, questi si possano *certamente* mettere in corrispondenza biunivoca fra loro, e quindi che, così come i due insiemi {Nord, Sud, Est, Ovest} e {Primavera, Estate, Autunno, Inverno}, per il fatto di poter essere posti in corrispondenza biunivoca tra loro, hanno in comune una certa entità astratta (quella che chiamiamo "il numero 4"), allo stesso modo anche due qualsiasi insiemi infiniti siano accomunati da una analoga entità astratta, il "numero infinito".

Sorpresa! Si può dimostrare che **non è così**.

Ad esempio, si può dimostrare che l'insieme i cui elementi sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

NON PUO' IN ALCUN MODO essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme i cui elementi sono "tutti i numeri assoluti, sia interi che con la virgola (finiti, periodici, illimitati non periodici)".

Quest'ultimo insieme, l'insieme dei numeri reali assoluti (= senza segno),

è dunque "più numeroso" dell'insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...};

ha "un grado di infinito maggiore" rispetto ad esso.

Studi più approfonditi mostrerebbero che esistono insiemi i quali hanno, a loro volta, un "grado di infinito" ancora maggiore di quello dell'insieme dei numeri reali assoluti; e anzi che

**dato un "grado di infinito", ne esiste sempre uno ancora maggiore,
dunque
"esistono infiniti gradi di infinito".**

Di queste affascinanti tematiche fu pioniere e acuto esploratore il danese **Georg Cantor** (1845-1918).

Se interessato, puoi trovare la appassionante trattazione dei "gradi di infinito" cliccando qui [⇨](#) oppure andando a leggere l'apposito capitolo del Volume 2.

