

16. ESERCIZI VARI SUGLI INSIEMI (risposte a pag. 95)

- 1) Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?
 a) $2 \in X \cap Y$ b) $2 \in Y - X$ c) $4 \subseteq X \cap Y$ d) $\{4\} \subseteq X \cap Y$ e) $\emptyset \in P(X)$ f) $\{2, 3, 4\} \supseteq \{4, 3\}$
 g) $\emptyset \subseteq X$ h) $\emptyset \subset X$ i) $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq X$ l) $\{1, 2, 3, 4\} \subset X$ m) $X \subseteq X$ n) $X \subset X$
- 2) Quando definiamo un insieme, è essenziale che la nostra definizione sia chiara ed univoca, in modo che non ci possano essere ambiguità di interpretazione ... in modo, insomma, che di fronte a un elemento, tutti possano essere concordi nello stabilire se appartiene o no a quell'insieme.
 Ciò premesso, quali fra le seguenti sono definizioni corrette?
 A) L'insieme dei grandi fiumi europei B) L'insieme degli studenti pigri delle scuole superiori di Roma
 C) L'insieme delle persone di cittadinanza italiana D) L'insieme delle persone che pesano più di 70 kg
- 3) Rappresenta *in un unico* diagramma di Venn l'insieme A dei multipli di 6 e l'insieme B dei multipli di 8, all'interno dell'*insieme ambiente* \mathbb{N}^* .
 Riconosci poi, nel diagramma, i seguenti insiemi: $A \cap B$; $A \cup B$; $A - B$; $B - A$; $\overline{A \cup B}$.
 Definisci infine ciascuno di tali insiemi
 a) per elencazione b) mediante una proprietà caratteristica degli elementi.
- 4) Definisci *per elencazione* i seguenti insiemi:
 $A = \{2k, \text{ con } k \in \mathbb{N}^*\}$ $B = \{2k, \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ $C = \{2^k, \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ $D = \{2k + 1, \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$
 $E = \{2n - 1, \text{ con } n \in \mathbb{N}^*\}$ $F = \left\{ \frac{k+1}{k^2}, \text{ con } k \in \mathbb{N}^* \right\}$ $G = \{3^{n+1} - 3^n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ $H = \{i \cdot 2^{i+1}, \text{ con } i \in \mathbb{N}\}$
- 5) Nel quesito precedente si chiedeva di passare da una definizione in simboli ad una per elencazione. Fai ora *il viceversa*, per gli insiemi che seguono (l'insieme in cui varia la lettera dovrà essere \mathbb{N} o \mathbb{N}^*):
 $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$ $B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$ $C = \{5, 15, 25, 35, 45, \dots\}$
 $D = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$ $E = \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots \right\}$ $F = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, \dots\}$
- 6) Stabilisci quale dev'essere, secondo logica, il numero successivo nella sequenza:
 a) 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... b) 23, 19, 15, 11, 7, 3, ... c) 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... d) 2, 4, 8, 16, 32, ...
 e) 1, 8, 27, 64, 125, ... f) 2, 6, 18, 54, 162, ... g) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... h) 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, ...
- 7) Sia $X = \{l, m, n, o\}$, $Y = \{l, m, n, o, p, q\}$, $W = \{g, h, i, l, m\}$. Definisci *per elencazione*:
 $X - W$ $X \cup W$ $X \cap W$ $X \cap Y$ $X \cup Y$ $(X - W) \cup (W - X)$ $(X \cup W) - (X \cap W)$
- 8) Un intero n si dice "abbondante" se la somma dei suoi divisori, comprendendo l'unità ma escludendo il numero stesso, va a superare n . Ad esempio, il numero 12 è "abbondante" perché i suoi divisori diversi dal numero stesso sono: 1, 2, 3, 4 e 6, e si ha $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$.
 Definisci per elencazione l'insieme $H = \{\text{numeri abbondanti non superiori a } 20\}$.
- 9) Un barista si diverte a fare una statistica riguardo alle abitudini dei clienti che ordinano un caffè, e riassume le sue osservazioni su un campione di 100 ordinazioni nel diagramma di Venn qui a fianco riportato.
- 100
- a) Quanti hanno ordinato un caffè Corretto?
 b) Quanti hanno scelto il Dolcificante (anziché lo zucchero)?
 c) Quanti hanno voluto un caffè Corretto, col Dolcificante?
 d) Quanti un caffè col dolcificante, non corretto?
- 10) Osservando il diagramma di Venn, che si riferisce all'iscrizione ai 3 gruppi sportivi disponibili (Calcio, Pallavolo, Atletica) degli allievi di una classe di Liceo, rispondi alle domande che seguono.
- 25
- a) Quanti ragazzi praticano almeno il calcio?
 b) Quanti ragazzi praticano almeno 1 sport?
 c) Quanti non ne praticano nessuno?
 d) Qual è la percentuale di ragazzi che praticano almeno 1 sport?
 e) Quanti ragazzi praticano 1 solo sport?
 f) Quanti ragazzi praticano esattamente 2 sport?
 g) Quanti praticano almeno 2 sport?
 h) Quanti praticano Atletica, ma non Calcio né Pallavolo?
 i) Quanti praticano sia Calcio che Pallavolo, ma non Atletica?

- 11) A 80 adulti viene domandato se sono Coniugati, se hanno la Laurea, se sono attualmente Disoccupati. Sentite le risposte, si compila il diagramma di Venn qui riportato.

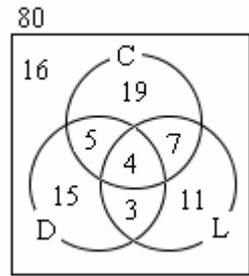
I) Quante fra queste persone

- non sono sposate?
- hanno la laurea ma sono disoccupate?
- non hanno la laurea e sono disoccupate?
- sono disoccupate ma non sposate?
- hanno una laurea o un lavoro?

II) a) Fra i laureati, qual è la percentuale di disoccupati?

b) E fra i non laureati?

c) Fra i laureati sposati, qual è la percentuale di disoccupati?



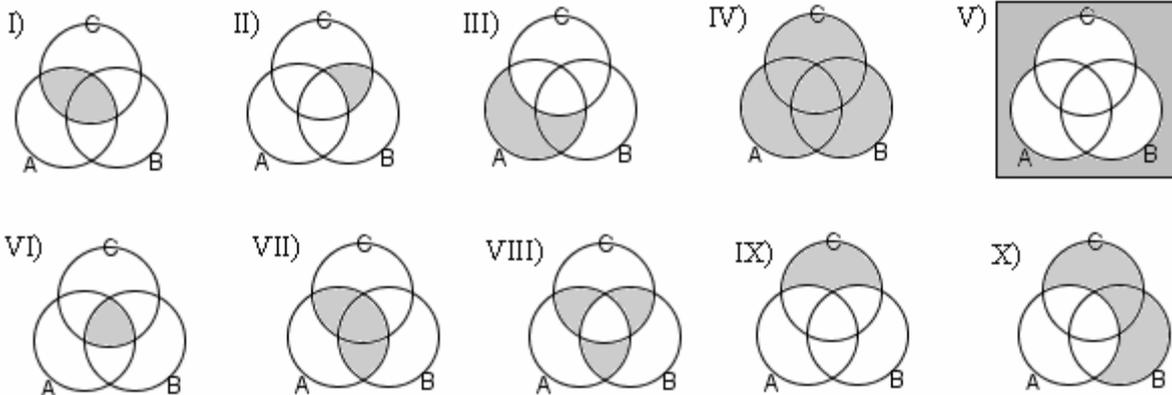
- 12) Riempi i puntini (A e B indicano due insiemi qualsiasi; aiutati con i diagrammi di Venn):

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \dots \quad (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = \dots \quad A - (A \cap B) = \dots \quad (A \cup B) - B = \dots$$

- 13) Sia $F \subseteq G$, $G \subseteq H$. Riempi i puntini: $(H - G) \cap F = \dots$ $(H - F) \cup G = \dots$

- 14) E' vero che se $X \cap Y = X$, allora $X \subseteq Y$?

- 15) Scrivi l'operazione insiemistica che produce come risultato l'insieme ombreggiato, in ciascuno dei casi.



- 16) Scrivi l'insieme il cui insieme delle parti è $\{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

- 17) Quanti elementi ha un insieme, il cui insieme delle parti contiene a) 1000 elementi? b) 1024 elementi?

- 18) Analizza la differenza fra le scritture 0 , $\{0\}$, \emptyset , $\{\emptyset\}$

- 19) Cosa accomuna l'insieme degli uccelli con 10 ali e l'insieme dei triangoli equilateri ottusangoli?

- 20) Se un insieme A ha 8 elementi e un altro insieme B ne ha 15, cosa si può affermare con certezza riguardo al numero di elementi di $A \cap B$? $A \cup B$? $A - B$? $B - A$?

La rappresentazione tramite i diagrammi di Venn si rivela a volte utilissima per risolvere senza grande fatica determinati problemi. Ecco alcuni esempi.

- 21) Se 50 allievi di una Scuola Superiore si sono iscritti al corso pomeridiano facoltativo di Francese, 40 a quello di Spagnolo, e fra questi 18 risultano iscritti a entrambi i corsi, si domanda: quanti impareranno solo Francese, quanti solo Spagnolo, quanti almeno una delle due lingue.
- 22) Un'indagine su un campione di 200 famiglie rivela che 53 di queste hanno (almeno) un cane, 38 (almeno) un gatto. Soltanto 8 delle famiglie che hanno uno o più gatti ospitano anche uno o più cani. E quante di queste famiglie non posseggono né cani né gatti? Quante almeno un cane o almeno un gatto?
- 23) Ognuno degli 80 concorrenti a un posto di lavoro ha studiato almeno una fra le due lingue Inglese e Francese. Sapendo che 72 dichiarano di aver studiato Inglese e 32 Francese, cosa si può dire riguardo al numero di quelli che hanno studiato entrambe le lingue?
- 24) In una scuola superiore europea ci sono 100 studenti. 15 sono iscritti soltanto al corso di Tedesco; fra tutti gli iscritti al corso di Tedesco 21 non imparano il Francese; 9 risultano iscritti sia a Tedesco che a Inglese, 22 sia a Francese che a Inglese. In totale, imparano il Tedesco 30 studenti, l'Inglese 49 studenti, il Francese 55 studenti. Si chiede: quanti alunni non imparano alcuna lingua? Quanti una sola? Quanti tutte e tre?

- 25) In una classe di scuola elementare la maestra parla delle malattie dei bambini. Da un'indagine fra i 25 scolaretti, emerge che tutti, ma proprio tutti, hanno avuto o il morbillo, o la scarlattina, o la varicella; 1 bambino anzi ha avuto tutte e tre le patologie, 4 sia il morbillo che la scarlattina ma non la varicella, altri 3 sia il morbillo che la varicella ma non la scarlattina. Se in 14 hanno avuto il morbillo, in 13 la scarlattina, e in 12 la varicella, si può dedurre, con questi dati, il numero di quelli che hanno fatto la scarlattina e la varicella ma non il morbillo?
- 26) I 30 studenti di una classe di Liceo discutono, in una Assemblea di Classe, sui cattivi risultati in Inglese riportati nelle pagelle quadrimestrali. In effetti, soltanto 12 fra gli studenti hanno avuto la sufficienza sia in scritto che in orale, mentre ben 15 hanno avuto l'insufficienza di scritto e 11 l'insufficienza in orale. Si domanda quanti sono risultati insufficienti sia in scritto che in orale.
- 27) Da www.mathocean.com:
Oshkosh did a study of the colors used in African national flags. He found that 38 flags have red, 20 have blue, 13 have both red and blue, and 8 have neither red nor blue. How many flags a) have red but not blue? b) have blue but not red? c) were included in the study?
- 28) [British Columbia Secondary School Mathematics Contest, 2008](#)
Examinations in each of three subjects, Anatomy, Biology, and Chemistry, were taken by a group of 41 students. The following table shows how many students failed in each subject, as well as in the various combinations:

subject	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
# failed	12	5	8	2	6	3	1

(For instance, 5 students failed in Biology, among whom there were 3 who failed both Biology and Chemistry, and just 1 of the 3 who failed all three subjects).

The number of students who passed all three subjects is: A) 4 B) 16 C) 21 D) 24 E) 26

- 29) Siano r ed r' due rette (pensate ciascuna come un insieme di punti); stanno su di uno stesso piano e non sono parallele. Sia P il punto in cui tali due rette si tagliano. E' corretto scrivere che $r \cap r' = P$?
- 30) Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurricolari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo. Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni?
A) 6 B) 9 C) 13 D) 16 E) 22 (Test di Ingresso alla Facoltà a numero chiuso di Architettura, 2008)
- 31) In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:
A) $N < 14$ B) $N \geq 14$ C) $N > 14$ D) $N = 22$ E) $N > 22$ (Test di Ingresso a Medicina, 2008)
- 32) In una classe si è formata una squadra di nuoto e una squadra di tennis. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
A) Il miglior nuotatore fra i tennisti è anche il miglior tennista fra i nuotatori
B) Se il più bravo tra i nuotatori non gioca a tennis, anche il più bravo tra i tennisti non nuota
C) Il più giovane fra i nuotatori che giocano a tennis è anche il più giovane dei tennisti che nuotano
D) Se il più vecchio tra i tennisti non nuota, allora il più vecchio tra i nuotatori non gioca a tennis
E) Il peggior nuotatore tra i tennisti è il miglior tennista tra i nuotatori

(Politecnico di Torino)

33) [Kangourou](#) 2004

Jean-Michel ha raccolto 30 funghi di due tipi: gallinacci e porcini. Se prende a caso 12 funghi, ci sarà almeno un gallinaccio fra di essi; se ne prende a caso 20, fra questi si avrà almeno un porcino. Quanti gallinacci ha raccolto Jean-Michel?

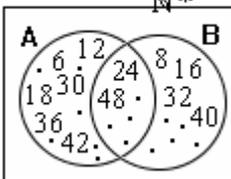
A) 11 B) 12 C) 19 D) 20 E) 29



- 34) Immaginiamo di suddividere tutte le persone che hanno vissuto o vivono tuttora su questa Terra in due insiemi: mettiamo nell'insieme A tutti quelli che, nella loro vita se sono già morti o fino a questo istante se ancora viventi, hanno stretto la mano ad altre persone un numero pari di volte, oppure nessuna volta; mettiamo nell'insieme B tutti quelli che, nella loro vita se sono già morti o fino a questo istante se ancora viventi, hanno stretto la mano ad altre persone un numero dispari di volte. Dimostra che l'insieme B è costituito da un numero pari di persone.
(Rielaborato da "The USSR Olympiad Problem Book" di Shklarsky, Chentzov, Yaglom, Irving)

RISPOSTE AGLI "ESERCIZI VARI SUGLI INSIEMI"

- 1) a) F b) F c) F d) V e) V f) V g) V h) V i) V l) V m) V n) F
 2) A) No B) No C) Sì D) Mah ... Non sembra sufficientemente chiara! Specifichiamo almeno: vestiti o nudi?

3)  $A \cap B = \{24, 48, 72, 96, \dots\} = \{\text{multipli di } 24\}$
 $A \cup B = \{6, 8, 12, 16, 18, 24, 30, 32, 36, 40, \dots\} = \{\text{numeri che sono multipli o di } 6 \text{ o di } 8\}$
 $A - B = \{6, 12, 18, 30, 36, 42, 54, \dots\} = \{\text{mult. di } 6 \text{ ma non di } 8\}$
 Nella figura a destra: $B - A = \{8, 16, 32, 40, 56, 64, 80, \dots\} = \{\text{mult. di } 8 \text{ ma non di } 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, \dots\} = \{\text{num. nat. non nulli che non sono mult. né di } 6 \text{ né di } 8\}$

- 4) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ $C = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ $D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$
 $E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} = D$ $F = \left\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, \dots\right\}$ $G = \{2, 6, 18, 54, 162, \dots\}$ $H = \{0, 4, 16, 48, 128, 320, \dots\}$

5) $A = \{5n, n \in \mathbb{N}^*\}$ $B = \{5n, n \in \mathbb{N}\}$ $C = \{5(2n+1), n \in \mathbb{N}\}$ $D = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ $E = \left\{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $F = \{n^2 + 1, n \in \mathbb{N}^*\}$

- 6) a) 19 b) -1 c) 28 d) 64 e) 216 f) 486 g) 34 (somma dei due precedenti) h) 8192 (prodotto dei due prec.)

7) $X - W = \{n, o\}$ $X \cup W = \{l, m, n, o, g, h, i\}$ $X \cap W = \{l, m\}$ (*) In generale
 $X \cap Y = \{l, m, n, o\} = X$ $X \cup Y = \{l, m, n, o, p, q\} = Y$ (dimostralo coi diagrammi di Venn!),
 $(X - W) \cup (W - X) = \{n, o\} \cup \{g, h, i\} = \{n, o, g, h, i\}$ per QUALUNQUE coppia
 $(X \cup W) - (X \cap W) = \{l, m, n, o, g, h, i\} - \{l, m\} = \{n, o, g, h, i\}$ (*) di insiemi A, B, è SEMPRE
 $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

- 8) $H = \{12, 18, 20\}$ 9) a) 30 b) 11 c) 3 d) 8 10) a) 8 b) 22 c) 3 d) 88% e) 13 f) 7 g) 9 h) 6 i) 1

- 11) I) a) 45 b) 7 c) 20 d) 18 e) 60 II) a) 28% b) $\approx 36\%$ c) $\approx 36\%$

12) $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$; $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$; $A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = A - B$

13) $(H - G) \cap F = \emptyset$; $(H - F) \cup G = H$

14) Sì, è vero. Se $X \cap Y = X$, vuol dire che gli elementi comuni a X e a Y sono tutti gli elementi di X, quindi che tutti gli elementi di X appartengono anche a Y. E ciò significa che X è un sottoinsieme di Y.

- 15) I) $A \cap C$ II) $(B \cap C) - A = (C - A) \cap B$ III) $A - C$ IV) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C) = A \cup B \cup C$
 V) $\overline{A \cup B \cup C}$ VI) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = B \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$ VII) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$
 VIII) $[(A \cap B) - C] \cup [(A \cap C) - B] \cup [(B \cap C) - A]$ oppure ... IX) $C - (A \cup B)$ X) $(B \cup C) - A$

16) La risposta corretta è: "non esiste". Infatti, verrebbe la tentazione di rispondere che l'insieme di partenza è $\{1, 3, 5\}$, senonché ogni insieme delle parti contiene sempre anche l'insieme vuoto, che invece qui non c'è!

- 17) a) Impossibile: il numero 1000 non è una potenza di 2 b) 10 ($1024 = 2^{10}$)

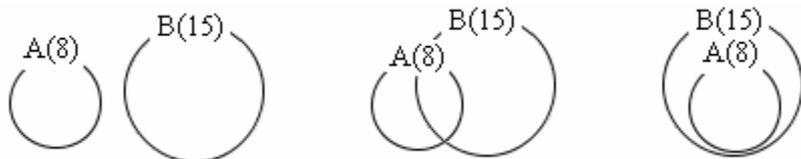
18) 0 indica un numero, $\{0\}$ indica l'insieme unitario il cui unico elemento è il numero 0, \emptyset indica l'insieme vuoto, $\{\emptyset\}$ indica un strano insieme unitario il cui unico elemento è l'insieme vuoto

19) Si identificano, sono lo stesso insieme: l'insieme vuoto

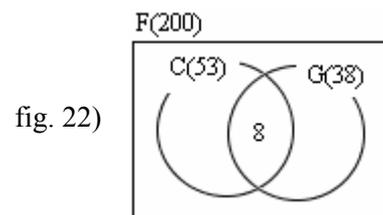
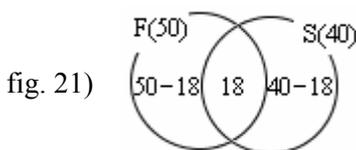
20) Con certezza possiamo dire solo che:

$A \cap B$ può avere da 0 a 8 elementi; $A \cup B$ da 15 a 23; $A - B$ da 0 a 8; $B - A$ da 7 a 15.

Te ne puoi render conto se rifletti sul fatto che le situazioni possibili sono quelle delle figure qui sotto.

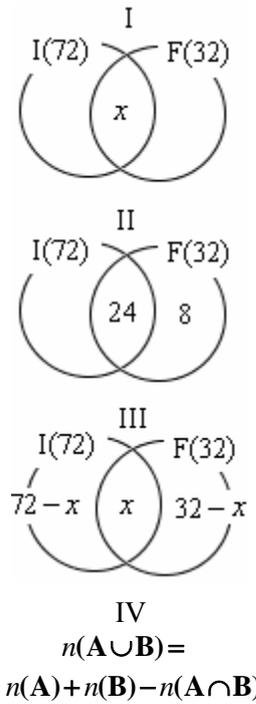


- 21) Solo Francese: 32; solo Spagnolo: 22; almeno una lingua: $32 + 18 + 22 = 72$



- 22) Né cani né gatti: 117; almeno un cane o un gatto: 83

- 23) I) La situazione è quella rappresentata in figura, dove dobbiamo determinare il numero x degli elementi comuni. Osserviamo che se noi, per calcolare il numero di elementi di $I \cup F$, sommassimo 72 con 32, sbagliaremmo perché in questa somma $72+32 = 104$ gli elementi comuni verrebbero contati 2 volte! In effetti, il numero corretto degli elementi di $I \cup F$ è (come ci dice il testo) 80, per cui quei $104 - 80 = 24$ elementi in più che ci ritroviamo sono dovuti al fatto che abbiamo contato due volte, anziché una sola, gli elementi di $I \cap F$. Ma allora $I \cap F$ ha, per l'appunto, 24 elementi.
- II) Oppure: in totale le persone coinvolte sono 80 ... Dato che l'Inglese l'hanno studiato in 72, se ne deduce che il numero di coloro che NON l'hanno invece studiato sarà di $80 - 72 = 8$. Questi 8 avranno allora fatto Francese, considerando che ognuno degli 80 ha studiato almeno una delle due lingue. Ma in totale hanno studiato Francese 32 persone, quindi oltre a questi 8, i soli fra gli 80 che hanno fatto Francese ma non Inglese, ce ne saranno altri $32 - 8 = 24$ che avranno studiato, oltre a Francese, pure Inglese.
- III) Anche con un'equazione: $72 - x + x + 32 - x = 80$ [$72 + 32 - x = 80$] da cui $x = 24$
- IV) ♥ In generale (IMPORTANTE!) tramite considerazioni del tipo di quelle fatte sopra si trae che, per qualsiasi coppia di insiemi A, B aventi ciascuno un numero finito di elementi, si ha sempre $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ [leggi: il numero degli elementi di $A \cup B$ è uguale a ...]



24) Una lettura attenta del quesito porta a stabilire che i numeri degli studenti nei vari "territori" sono quelli indicati nella figura qui a fianco → Dopodiché:

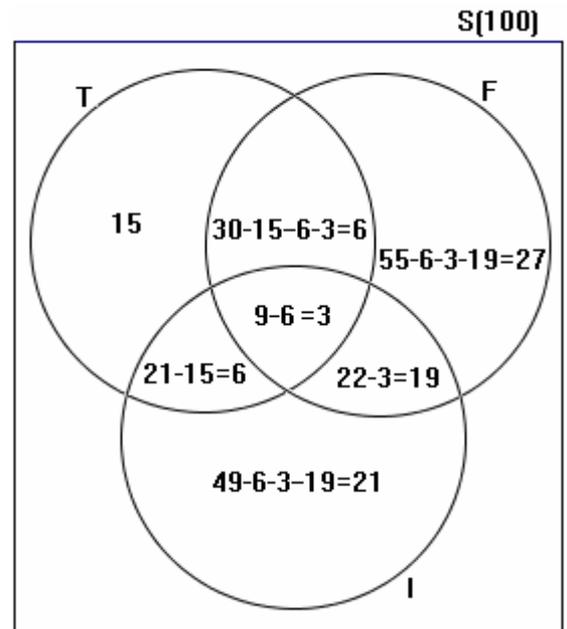
- gli studenti che non imparano nessuna lingua sono $100 - (15 + 6 + 27 + 6 + 3 + 19 + 21) = 100 - 97 = 3$
- gli studenti che imparano una sola lingua sono $15 + 27 + 21 = 63$
- gli studenti che imparano tutte e tre le lingue sono 3

25) 5 bambini hanno fatto la scarlattina e la varicella ma non il morbillo

26) Sono risultati insufficienti sia in scritto che in orale in 8

27) a) 25 b) 7 c) 53 28) E

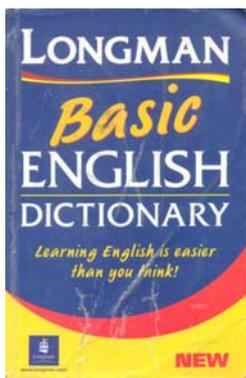
29) E' sostanzialmente corretto, ma formalmente non corretto. L'intersezione fra due insiemi è sempre ancora un insieme, non un elemento. Quindi la scrittura esatta è $r \cap r' = \{P\}$: l'intersezione fra l'insieme r e l'insieme r' è l'insieme unitario, che ha come unico elemento il punto P. Tuttavia, anche la scrittura $r \cap r' = P$ è accettata.



30) A 31) B 32) C 33) C 34) Ci hai pensato per bene? Davvero? Allora clicca sulla freccia per la correzione →

Dal sito

<http://searchsecurity.techtarget.com>
(in Inglese, "insieme" si dice "set")



SYMBOL	MEANING	EXAMPLE
{ }	is a set	$S = \{4, 5\}$
\in	is an element of	$s \in S$
\notin	is not an element of	$s \notin T$
\subseteq	is a subset of	$S \subseteq T$
\subset	is a proper subset of	$S \subset T$
\cup	union	$S \cup T$
\cap	intersection	$S \cap T$
\emptyset	the empty set	$\{2, 3, 4\} \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$