RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 81

1) $A=\{31,37,41,43,47,53,59\}$ $B=\{6,12,18,24,30,36,...\}$ $C=\{a,\ e,\ o\}$ $D=\{7?,16,25,34,43,52,61,70\}$.
Il quesito è ambiguo in quanto non è chiaro se il 7 debba appartenere o no all'insieme. Se da una parte con una sola cifra sembra non corretto parlare di "somma delle cifre", dall'altra non ha nemmeno torto chi ritiene spontaneo che, di fronte a una sola cifra, per "somma" si debba intendere quell'unica cifra.

2) $E=\{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80,\ 90,\ 100\}=\{\text{multipli di 10 minori o uguali a 100}\}=$
$=\{\text{multipli di 10 minori di 101}\}=\{\text{multipli di 10 fino a 100 compreso}\}=\{\text{primi dieci multipli di 10}\}=...$
$F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ ...\right\}=\{\text{frazioni senza segno con numeratore uguale a 1}\}$
$G=\{1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ ...\}=\{\text{potenze di 3, a partire da quella con esponente 0}\}$
$H=\{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ ...\}=\{\text{quadrati dei numeri naturali}\}$
$I=\{\text{numeri naturali di tre cifre, le cui cifre siano numeri consecutivi in ordine crescente}\}$
$L=\{11,\ 33,\ 55,\ 77,\ 99,\ 121,\ 143,\ ...\}=\{\text{multipli dispari di 11}\}$

3) $D=\{n^3,\ \ n\in\mathbb{N}^*\}=\{1,\ 8,\ 27,\ 64,125,\ 216,\ ...\}$ $E=\{3n,\ \ n\in\mathbb{N}^*\}=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ ...\}$
$F=\{\sqrt{x},\ \ x\in\mathbb{N}\}=\{0;\ 1;\ 1{,}4...;\ 1{,}7...;\ 2;\ 2{,}2...;\ 2{,}4...;\ 2{,}6...;\ 2{,}8...;\ 3;\ 3{,}1...;\ ...\}$

4) $G=\{5n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$ $H=\left\{\frac{1}{2^n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ $I=\left\{\frac{5^n-1}{5^n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

5) a) Una circonferenza, di centro quel punto e raggio 5 cm b) Un cerchio, di centro quel punto e raggio 5 cm
6) a) Una superficie sferica, di centro quel punto e raggio 5 cm b) Una sfera, di centro quel punto e raggio 5 cm
7) E' una corona circolare
8) E' una superficie cilindrica illimitata; è l'insieme dei punti che stanno su due piani, paralleli a quello fissato
9) Perché non è univoca: una ragazza che è considerata carina da una persona, potrebbe non esserlo per un'altra.

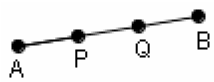
RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 82

1) Vuoto (due circonf. si dicono "concentriche" se hanno lo stesso centro); se però le due circonf., oltre ad avere lo stesso centro, avessero anche lo stesso raggio, allora TUTTI i punti di ciascuna di esse sarebbero comuni anche all'altra, e l'insieme dei punti comuni non sarebbe, in questo caso particolare, né unitario né vuoto.

2) Né unitario, né vuoto (i punti comuni sono due: gli estremi della corda).

3) Unitario (l'unico punto che gode di questa proprietà è il punto di mezzo, detto anche "punto medio", del segmento).

4) Né unitario, né vuoto (DUE punti godono di questa proprietà: vedi figura).



5) Unitario: l'unico suo elemento è il numero 2.

6) Vuoto. Tuttavia, in una definizione "estesa" di parallelismo, anche due rette coincidenti, sovrapposte, costituiscono un caso particolare di rette parallele.
In questo caso l'insieme dei punti comuni non sarebbe, evidentemente, né vuoto né unitario, perché conterrebbe tutti i punti delle due rette coincidenti considerate.

7) Di 16 elementi. Se $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ allora i sottoinsiemi di A, quindi gli elementi di $P(A)$, sono i seguenti:

$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ d\},\ \{b,\ c\},\ \{b,\ d\},\ \{c,\ d\},\ \{b,\ c,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\},\ \{a,\ b,\ d\},\ \{a,\ b,\ c\},\ A$

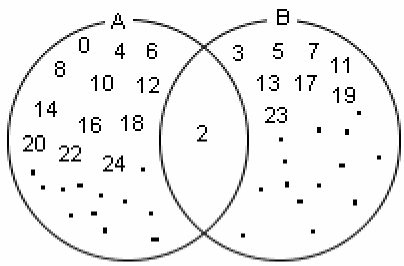
8) Dunque, vediamo … si può facilmente ricavare la tabella qui a fianco.
Da essa sembra proprio che, se si indica con *n* il numero degli elementi di A, il numero degli elementi di P(A) sia 2^n.
In effetti, si potrebbe dimostrare che è proprio così, qualunque sia *n*.

Numero di elementi di A	Numero di elementi di P(A)
1	2
2	4
3	8
4	16

9) Sì, perché l'insieme vuoto $\varnothing$ contiene $n=0$ elementi,
e l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso,
quindi l'insieme $P(\varnothing)$ ha 1 solo elemento; ma è per l'appunto $2^0=1$.

RISPOSTE AGLI ESERCIZI DELLE PAGG. 86-87

1)
$A=\{\text{numeri pari}\}=\{0,2,4,6,8,10,12,...\}$
$B=\{\text{numeri primi}\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,...\}$
$A\cap B=\{2\}$
$A\cup B=\{0,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20,22,23,...\}$

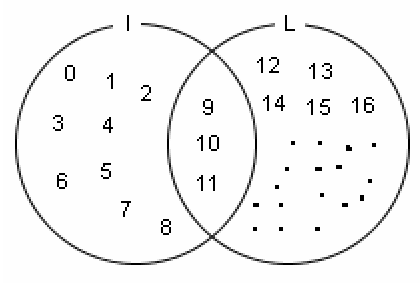


2)

$I = \{\text{numeri naturali minori di } 12\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

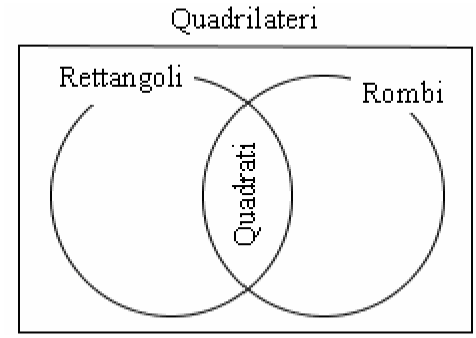
$L = \{\text{numeri naturali maggiori di } 8\} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...\}$

$I \cap L = \{9, 10, 11\} \qquad I \cup L = \mathbb{N}$



3) $A = \{\text{rettangoli}\} \quad B = \{\text{rombi}\} \quad A \cap B = \{\text{quadrati}\}$

$A \cup B = \left\{ \begin{array}{l} \text{quadrilateri che sono o rettangoli, o rombi,} \\ \text{ossia per i quali è vera} \\ \text{almeno una fra queste due affermazioni:} \\ \text{il quadrilatero ha tutti i lati uguali fra loro,} \\ \text{oppure tutti gli angoli retti} \end{array} \right\}$



Ricordiamo che se c'è un insieme nel quale tutti gli altri sono "immersi" (insieme "**universo**"), questo viene rappresentato preferibilmente con un **rettangolo** anziché un ovale

4)

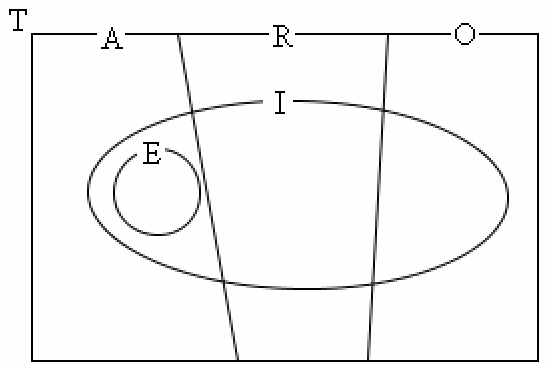
$L = \{\text{num. naturali minori di } 30\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 25, 26, 27, 28, 29\}$

$P = \{\text{numeri primi}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...\}$

$Q = \{\text{num. naturali terminanti con la cifra } 3\} = \{3, 13, 23, 33, 43, 53, ...\}$

$L \cap P \cap Q = \{3, 13, 23\}$

5) e 6)



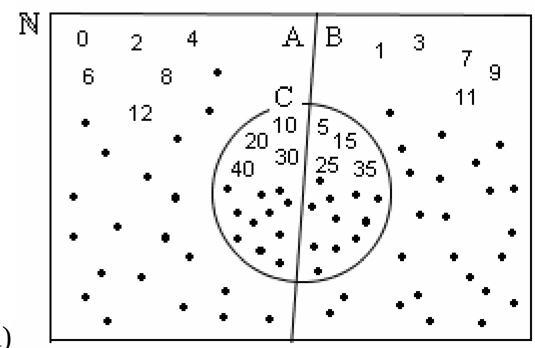
Poiché ogni triangolo equilatero è anche isoscele e acutangolo, si ha $E \subseteq I$, $E \subseteq A$.
La figura è stata tracciata tenendo conto altresì che
$A \cup R \cup O = T, \quad A \cap R = \varnothing, \quad A \cap O = \varnothing, \quad R \cap O = \varnothing$

$A \cap O = \varnothing$
$A \cup O = \{\text{triangoli non rettangoli}\}$
$R \cap I = \{\text{triangoli rettangoli isosceli}\}$
$R \cap E = \varnothing$

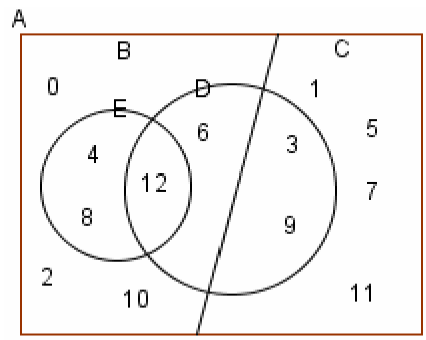
$\left. \begin{array}{l} I \cap E = E \\ I \cup E = I \\ A \cap E = E \\ A \cup E = A \end{array} \right]$ NOTA

NOTA: In generale, quando abbiamo un sottoinsieme con un suo "sovrainsieme", l'intersez. è il sottoinsieme, mentre l'unione è l'insieme più grande

7)

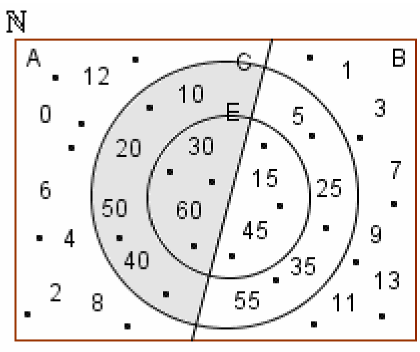


a)



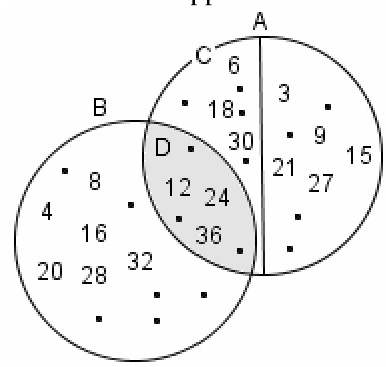
b)

c)



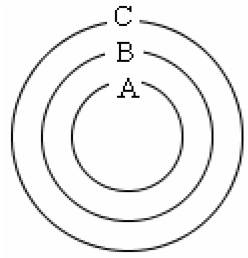
L'insieme ombreggiato è D

d) Può andar bene la rappresentazione seguente



o comunque qualsiasi diagramma dal quale emerga che:
$A \cap B = D; \;\; D \subseteq C \subseteq A$

8) a) l’insieme vuoto b) il cerchio più piccolo c) l’insieme vuoto
d) la sfera più piccola e) un cerchio massimo della sfera
f) una circonferenza massima della sfera g) un segmento, diametro della sfera
h) un insieme formato da due soli punti, estremità di un diametro della superficie sferica

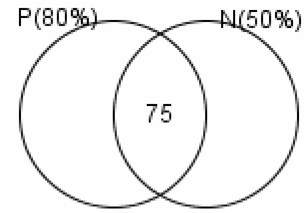


9) $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup \varnothing = A$

10) $A \cap B \cap C = A$; $A \cup B \cup C = C$

11) a) E’ l’intero piano π
b) E’ l’insieme unitario, avente come unico elemento P: $\{P\}$

12)



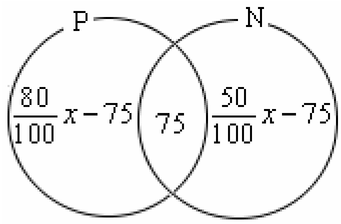
a) Poiché ogni ragazza deve fare almeno uno sport, vuol dire che tutto quel 20% di ragazze che non fa pallavolo, farà nuoto.
Ma poiché risultano fare nuoto ben il 50% delle ragazze, ci sarà un 30% delle ragazze le quali, oltre a fare nuoto, faranno anche pallavolo.
In definitiva, avremo che
(indicati con n_R, n_P, n_N rispettivamente il numero totale delle ragazze, il numero di quelle che fanno Pallavolo, il numero di quelle che fanno Nuoto):

$$\frac{30}{100} n_R = 75 \quad \text{da cui} \quad n_R = 75 \cdot \frac{100}{30} = 250$$

e di conseguenza poi $n_P = \frac{80}{100} \cdot 250 = 200$; $n_N = \frac{50}{100} \cdot 250 = 125$

IN ALTERNATIVA,
si sarebbe potuto tracciare il diagramma riportato qui a destra,
dove con x è indicato il numero totale delle ragazze,
e risolvere con l’equazione

$$\left(\frac{80}{100}x - 75\right) + \left(\frac{50}{100}x - 75\right) + 75 = x$$



b) In quel caso, non si sarebbe potuta dare una risposta sicura, perché avremmo potuto avere molte situazioni, compresa quella che l’insieme N fosse incluso in P.
In quest’ultimo caso, il numero totale delle ragazze sarebbe stato di 150, di cui 75 iscritte a Nuoto (e tutte queste pure a Pallavolo) e 120 a Pallavolo (di cui 75 anche a Nuoto).
La risposta più accurata al problema sarebbe stata in definitiva: “da un minimo di 150 ad un massimo di 250 ragazze”.

RISPOSTE AGLI ESERCIZI DI PAG. 88

1) E’ l’insieme dei numeri pari. Ricordiamo che anche 0 è considerato pari.

NOTA. La comunità matematica è unanime nel considerare lo “zero” (0) come un numero PARI.
Vengono considerati “pari” quei numeri *naturali* (*) che si possono scrivere sotto la forma $2 \cdot n$, essendo n ancora un numero *naturale.*
Poiché 0 evidentemente gode di questa proprietà ($0 = 2 \cdot 0$), ecco che 0 è pari.
(*) I “numeri naturali” sono gli interi senza segno, 0 compreso: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …

Questa scelta è anche conveniente per tutta una serie di motivi. Fra i tantissimi, ne citiamo uno solo, di carattere “pratico”: in certi giorni, in determinate città, per limitare l’inquinamento atmosferico viene consentito di circolare solo alle vetture con “targhe dispari”, in altri giorni solo alle vetture con “targhe pari”. La finalità è evidentemente di far sì che in quei giorni sia in circolazione soltanto la metà circa dei veicoli abitualmente in uso. E’ chiaro che considerare lo 0 “pari” è pienamente conforme alla logica e all’obiettivo, in questo contesto.

Parità” e “disparità” si possono estendere, in senso più “largo”, anche agli interi *relativi*.
Vengono considerati pari quegli interi relativi che si possono scrivere nella forma $2 \cdot x$, essendo x ancora un intero relativo: quindi, in quest’ambito, sono pari $0, +2, -2, +4, -4, +6, -6, \ldots$ e dispari gli altri interi relativi.

2) E’ l’insieme dei numeri pari, privato dello 0.

3) Per l’insieme $\mathbb{N} - \{0\}$, l’insieme dei numeri naturali non nulli, il simbolo utilizzato è $\mathbb{N}^*$.