C) IL TEOREMA DEL RESTO E LA "REGOLA DI RUFFINI"

Supponiamo di avere una divisione fra due polinomi (aventi, è ovvio, la stessa variabile, diciamo x) nella quale il polinomio divisore sia un binomio della forma $(x-k)$, essendo k un numero fissato.

Per fare un esempio, nella divisione $(2x^3-5x^2-x+6):(x-4)$
il divisore è appunto della forma $(x-k)$; *in questo caso, ovviamente,* $k=4$.

Se dunque si ha una divisione di questo tipo, allora …

I) … si può determinare il resto della divisione anche senza effettuare la divisione stessa, mediante il

♥ TEOREMA DEL RESTO:
"Il resto della divisione $\mathrm{P}(x):(x-k)$ è uguale a $\mathrm{P}(k)$, cioè al numero che si ottiene sostituendo il numero k al posto di x nel polinomio dividendo, e poi svolgendo i calcoli"

OSSERVAZIONE
Quando il **divisore** è un **binomio di 1° grado** come $(x-k)$, allora il **resto**, essendo di **grado inferiore rispetto al divisore**, è obbligato ad essere di **grado zero**, quindi a non contenere più la variabile, riducendosi ad una **costante numerica**.

Ad esempio, considerando la divisione $(2x^3-5x^2-x+6):(x-4)$
posso subito dire che il resto sarà $\mathrm{P}(4)=2\cdot4^3-5\cdot4^2-4+6=128-80-4+6=50$

II) … e in più la divisione si può eseguire, in alternativa al solito metodo di pag. 115 (il quale continua, volendo, a essere pienamente valido), tramite un algoritmo più veloce chiamato REGOLA DI RUFFINI e illustrato qui di seguito, sempre sull'esempio di prima:

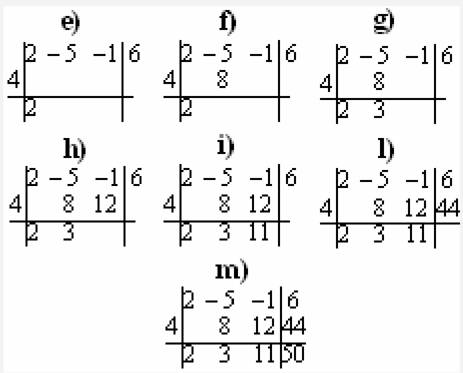
$$\left(2x^3-5x^2-x+6\right):\left(x-4\right)\ \rightarrow\ \begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ 4 & & 8 & 12 & 44 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 50 \end{array}\quad \text{DA CUI}\ \ \mathrm{Q}(x)=2x^2+3x+11;\ \ \mathrm{R}=50$$

Spieghiamo lo schema.

a) **Sulla prima riga in alto, si scrivono i coefficienti del polinomio dividendo**;
b) si traccia una linea verticale davanti al 1° coefficiente, ed un'altra davanti all'ultimo coefficiente;
c) si traccia, sotto la riga dei coefficienti ma un poco distanziata, una linea orizzontale;
d) **nell'angolino a sinistra in alto, si scrive il "k" (che nel nostro esempio vale 4)**

Così facendo si ottiene $\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ 4 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$ … e a questo punto si incomincia a "lavorare":

sulla riga più in basso, il calcolo fornirà i coefficienti del polinomio quoziente, seguiti (nell'angolo in basso a destra) dal resto della divisione.



Ma come avviene questo calcolo? Semplice:

e) si "**abbassa**" il 1° coefficiente, che è 2
f) si **moltiplica** $2\cdot4$ e si scrive il risultato, 8, sotto al 2° coeff.
g) si **somma** algebricamente, in colonna: $-5+8=3$
h) si **moltiplica** $3\cdot4$ e si scrive il risultato, 12, sotto al 3° coeff.
i) si **somma** algebricamente, in colonna: $-1+12=11$
l) si **moltiplica** $11\cdot4$ scrivendo il risultato, 44, sotto al 4° coeff.
m) si **somma** algebricamente, in colonna: $6+44=50$

Così il procedimento è terminato. Ora:

♪ **il polinomio quoziente ha grado inferiore di 1 unità rispetto al polinomio dividendo** (basti pensare che se si svolgesse la divisione con il "vecchio" procedimento, il primo calcolo sarebbe $2x^3:x=2x^2$) quindi, essendo i suoi coefficienti $2\ \ 3\ \ 11$, si avrà $\mathrm{Q}(x)=2x^2+3x+11$

♫ **il resto, come si diceva, compare nella parte bassa dell'angolino di destra** ed è, come d'altronde si era già previsto tramite il Teorema del Resto, $\mathrm{R}=50$.

Controlla tu stesso che effettuando la divisione col "vecchio" algoritmo, si otterrebbero lo stesso quoziente e lo stesso resto.

- Vediamo ora quest'altro esempio, interessante sotto diversi aspetti.

$$(a^4 - 4a^2 - 3a - 7):(a+2)$$

C'è la lettera a al posto della lettera x, e fin qui niente di speciale;

inoltre, il polinomio dividendo è "incompleto", in quanto manca il termine di 3° grado;
… beh, non importa, faremo conto che il termine di 3° grado abbia coefficiente 0.

Ma soprattutto, si osserva che il divisore è della forma

lettera + un numero

anziché

lettera − un numero

e questa sì che è una novità di rilievo!
Dobbiamo domandarci:
sarà possibile anche in questo caso applicare il Teorema del Resto e la Regola di Ruffini?

La risposta è AFFERMATIVA, per il fatto che

♥ **il binomio $a+2$ si può scrivere come $a-(-2)$**
e quindi anche in questo caso si può ritenere di avere un binomio della forma
$(variabile - k)$;
basta pensare che il valore di k sia, questa volta, -2 !!!

$$\boxed{a+2 = a-(-2) = a-k \ \ (con \ \ k=-2)}$$

Dunque, procediamo.

Calcolo preliminare del resto col Teorema del Resto:

$$R = P(k) = P(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^2 - 3\cdot(-2) - 7 = 16 - 16 + 6 - 7 = -1$$

Determinazione del quoziente tramite la Regola di Ruffini:

	1	0	−4	−3	−7
−2		−2	4	0	6
	1	−2	0	−3	−1

$Q(a) = a^3 - 2a^2 - 3;$ Ecco fatto!
$R = -1$

- Un ultimo esempio:

$$(x^3 - 1):(x-1)$$

$$R = P(1) = 1^3 - 1 = 0$$

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$Q(x) = x^2 + x + 1$
$R = 0$

Quando si divide un polinomio per un altro polinomio
e si vede che il resto della divisione è zero,
si dice che il primo polinomio è "divisibile" per il secondo.

In matematica, l'aggettivo "divisibile"
è sempre utilizzato col significato di
"divisibile esattamente, cioè con resto 0".

Ma allora possiamo affermare che il Teorema del Resto
ci fornisce, in un contesto di polinomi, un vero e proprio
"**CRITERIO DI DIVISIBILITA'** ":

"**un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio della forma $(x-k)$**
se e soltanto se $P(k)=0$"

E veniamo, per concludere "in bellezza", alla

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL RESTO

Supponiamo di avere la divisione

$$P(x):(x-k),$$

e indichiamo

- con $Q(x)$ il quoziente della divisione stessa,
- e con R il resto.

Allora varrà l'**identità** (NOTA)

$$P(x) = Q(x)\cdot(x-k) + R$$

Se adesso noi in questa identità sostituiamo k al posto di x
(= assegniamo a x il valore k) avremo

$\mathbf{P(k)} = Q(k)\cdot(k-k) + R = Q(k)\cdot 0 + R = 0 + R = \mathbf{R}$ C.V.D.

NOTA
Come sappiamo, per "identità" si intende
un'uguaglianza letterale che è sempre vera,
per qualsiasi valore "ammissibile"
delle lettere in gioco. Ad esempio ,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

è un'identità.
*Generalmente il termine "**identità**"*
*è contrapposto a "**equazione**".*

Gli **ESERCIZI** sul Teorema del Resto e sulla Regola di Ruffini si trovano a **pagina 121**.