

## PRODOTTI NOTEVOLI

### 12. QUADRATO DI UN BINOMIO

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Abbiamo così ricavato la formula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

che si può esprimere a parole nel modo seguente.

Il **quadrato di un binomio** si esegue facendo

- il **quadrato del primo** termine;
- 2 volte il primo termine  $\times$  il secondo termine (= il **doppio prodotto del primo per il secondo**)
- il **quadrato del secondo** termine

**Esempi** di applicazione della formula:

a)  $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

b)  $\underbrace{(a-6x)^2}_{(a+(-6x))^2} = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-6x) + (-6x)^2 = a^2 - 12ax + 36x^2$

♥ Ricordare che la formula va applicata mettendo (ovviamente) al posto di “a” il primo termine del binomio dato, e al posto di “b” il secondo termine, e tenendo soprattutto presente che **ciascun termine deve comprendere anche il segno che lo precede!**

♪ I passaggi intermedi si possono fare a mente; un buon consiglio è tuttavia quello di **indicare il doppio prodotto, prima di svolgerlo, nei casi in cui questo non è semplicissimo.**

c)  $\left(-\frac{1}{4}x + 3y\right)^2 = \left(\underbrace{-\frac{1}{4}x}_{1^\circ \text{ termine}} \underbrace{+3y}_{2^\circ \text{ termine}}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}x\right)^2 + \cancel{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}x\right) \cdot 3y + (3y)^2 = \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{2}xy + 9y^2$

d)  $\left(\underbrace{-t}_{1^\circ} \underbrace{-3}_{2^\circ}\right)^2 = (-t)^2 + 2 \cdot (-t) \cdot (-3) + (-3)^2 = t^2 + 6t + 9$

e)  $(3x^2 + 7x)^2 = 9x^4 + 42x^3 + 49x^2$

f)  $(2a-b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$

- **Verifica** per  $a=5$ ,  $b=3$

$$1^\circ \text{ membro} = (2a-b)^2 = (2 \cdot 5 - 3)^2 = (10-3)^2 = 7^2 = \boxed{49}$$

$$2^\circ \text{ membro} = 4a^2 - 4ab + b^2 = 4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2 = 4 \cdot 25 - 60 + 9 = 100 - 60 + 9 = \boxed{49}$$

- **Verifica** svolgendo il calcolo letterale in un altro modo:

$$(2a-b)^2 = (2a-b)(2a-b) = 4a^2 - 2ab - 2ab + b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$$

g)  $\left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{6}x^2y\right)^2 = \frac{9}{16}x^6 + \cancel{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}x^3\right) \cdot \frac{5}{6}x^2y + \frac{25}{36}x^4y^2 = \frac{9}{16}x^6 - \frac{5}{4}x^5y + \frac{25}{36}x^4y^2$

h)  $(-5-x^2)^2 = 25 + 10x^2 + x^4$

i) Un esempio di **espressione**:

$$\begin{aligned} (x-1)(x-6) + 3(x-1)^2 - (2x-3)^2 &= x^2 - \underline{6x} - \underline{x} + 6 + 3(x^2 - 2x + 1) - (4x^2 - 12x + 9) = \\ &= \cancel{x^2} - \cancel{7x} + \cancel{6} + \cancel{3x^2} - \cancel{6x} + \cancel{3} - \cancel{4x^2} + \underline{12x} - \underline{9} = -x \end{aligned}$$

- Lo **schema qui a fianco** rappresenta le varie **combinazioni di segno** nel binomio di partenza e nel risultato

$$\begin{array}{rcl} (+ \ +)^2 & = & + \ + \ + \\ (+ \ -)^2 & = & + \ - \ + \\ (- \ +)^2 & = & + \ - \ + \\ (- \ -)^2 & = & + \ + \ + \end{array}$$

- I **seguenti due esempi sono puramente numerici (= senza lettere)**, e mostrano come il quadrato di un binomio possa, in taluni casi, costituire una tecnica efficace di **calcolo mentale**. Tutti i passaggi intermedi, infatti, possono essere svolti a mente, senza scrivere nulla!

l)  $53^2 = (50 + 3)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 3 + 3^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$

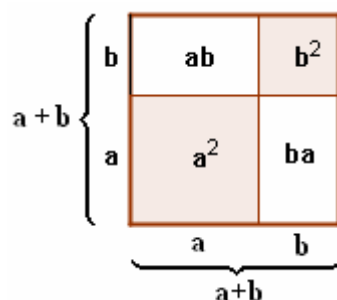
m)  $29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

- La **figura qui a destra** costituisce una **visualizzazione-justificazione geometrica della formula per il quadrato di un binomio**.

Essa mostra un **quadrato il cui lato misura  $a + b$** . L'area di questo **quadrato** può essere calcolata in **2 modi diversi**.

I) Pensando direttamente all'area totale si ottiene  
 $S = (a + b)^2$

II) ... e sommando invece le 4 aree parziali si ha  
 $S = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Il limite di questa giustificazione sta nel fatto che si riferisce solo ai casi in cui  $a, b$  assumano valori non negativi.

Poiché però *i due calcoli devono portare al medesimo risultato*, ecco che salta fuori la nostra formula.

- Gli **esempi che seguono** presentano **esponenti letterali**:

n)  $(3a^k - 2)^2 = (3a^k)^2 + 2 \cdot 3a^k \cdot (-2) + (-2)^2 = 9a^{2k} - 12a^k + 4$

o)  $(a^x + a^y)^2 = (a^x)^2 + 2 \cdot a^x \cdot a^y + (a^y)^2 = a^{2x} + 2a^{x+y} + a^{2y}$

p)  $(x^{a+b} + x^{a-b})^2 = (x^{a+b})^2 + 2 \cdot x^{a+b} \cdot x^{a-b} + (x^{a-b})^2 = x^{2a+2b} + 2x^{2a} + x^{2a-2b}$

## ESERCIZI

- |                                                                                                                             |                                                          |                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1) $(x+1)^2$                                                                                                                | 2) $(x+2)^2$                                             | 3) $(x+3)^2$ con verifica per $x=1$                           |
| 4) $(x-4)^2$                                                                                                                | 5) $(x-5)^2$                                             | 6) $(x-6)^2$ con verifica per $x=8$                           |
| 7) $(4w-7)^2$                                                                                                               | 8) $(3x-2y)^2$                                           | 9) $(-t+8)^2$ con due verifiche: per $t=3$ e per $t=-2$       |
| 10) $\left(\frac{11}{12}x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2$                                                                        | 11) $\left(-\frac{1}{5}e^5 + \frac{1}{3}e^3\right)^2$    | 12) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ con verifica per $a=1/2$ |
| 13) $(2k-9)^2$                                                                                                              | 14) $(1-x^2)^2$                                          | 15) $(-abc-1)^2$                                              |
| 16) <b>Calcolo mentale:</b><br>$61^2 = (60+1)^2 = \dots$                                                                    | 17) <b>Calcolo mentale:</b><br>$59^2 = (60-1)^2 = \dots$ | 18) <b>Calcolo mentale:</b><br>$999^2 = (1000-1)^2 = \dots$   |
| 19) Ricordando che $24^2 = 576$ , calcola a mente $2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2$ (il "Mega" $\Rightarrow$ dell'Informatica) |                                                          |                                                               |
| 20) $(4s^n + 3s)^2$                                                                                                         | 21) $(a^{m+1} + a^{m+2})^2$                              | 22) $(5x^n - 4x^p)^2$                                         |

## RISULTATI

- |                                                               |                                                             |                                       |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $x^2 + 2x + 1$                                             | 2) $x^2 + 4x + 4$                                           | 3) $x^2 + 6x + 9$                     |
| 4) $x^2 - 8x + 16$                                            | 5) $x^2 - 10x + 25$                                         | 6) $x^2 - 12x + 36$                   |
| 7) $16w^2 - 56w + 49$                                         | 8) $9x^2 - 12xy + 4y^2$                                     | 9) $t^2 - 16t + 64$                   |
| 10) $\frac{121}{144}x^4 + \frac{55}{12}x^3 + \frac{25}{4}x^2$ | 11) $\frac{1}{25}e^{10} - \frac{2}{15}e^8 + \frac{1}{9}e^6$ | 12) $a^2 + a + \frac{1}{4}$           |
| 13) $4k^2 - 36k + 81$                                         | 14) $1 - 2x^2 + x^4$                                        | 15) $a^2b^2c^2 + 2abc + 1$            |
| 16) 3721                                                      | 17) 3481                                                    | 18) 998001                            |
| 19) 1.048.576                                                 |                                                             |                                       |
| 20) $16s^{2n} + 24s^{n+1} + 9s^2$                             | 21) $a^{2m+2} + 2a^{2m+3} + a^{2m+4}$                       | 22) $25x^{2n} - 40x^{n+p} + 16x^{2p}$ |