

15. CUBO DI UN BINOMIO

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2a^2b} + \underline{2ab^2} + \underline{ab^2} + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Il cubo di un binomio si esegue mediante la formula

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

e cioè facendo:

- il **cubo del primo** termine
- **3 volte il quadrato del primo** \times il **secondo**
- **3 volte il primo** \times il **quadrato del secondo**
- il **cubo del secondo**

Esempi:

a) $(x+2y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot 4y^2 + 8y^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

b) $(a-5)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot (-5) + 3 \cdot a \cdot (-5)^2 + (-5)^3 = a^3 - 15a^2 + 75a - 125$
 $a + (-5)$

c) $(-x^2+1)^3 = -x^6 + 3 \cdot x^4 \cdot 1 + 3 \cdot (-x^2) \cdot 1 + 1 = -x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1$

d) $(-4a^2-a)^3 = -64a^6 + 3 \cdot 16a^4 \cdot (-a) + 3 \cdot (-4a^2) \cdot a^2 - a^3 = -64a^6 - 48a^5 - 12a^4 - a^3$

e) $(2-x^n)^3 = 8 - 12x^n + 6x^{2n} - x^{3n}$

f) **Alla fine**, dopo aver fatto i calcoli, la **successione dei segni** potrà essere *esclusivamente* una delle seguenti:

$$\boxed{+ + + +}$$

$$\boxed{+ - + -}$$

$$\boxed{- + - +}$$

$$\boxed{- - - -}$$

esercizio a)

esercizi b), e)

esercizio c)

esercizio d)

□ Il primo segno dello sviluppo coinciderà quindi sempre con quello del 1° termine del binomio dato
 ♥ e i quattro segni dello sviluppo saranno

- ♪ **tutti uguali** fra loro, se i coefficienti dei termini del binomio iniziale erano concordi;
- ♪ **alterni**, se i coefficienti dei termini del binomio iniziale erano discordi.

g) Un'espressione:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}[(x+3)^3 - (x-2)^3] - 3x(x+1) = \frac{1}{5}[x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 9 + 27 - (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2) + 3 \cdot x \cdot 4 - 8)] - 3x^2 - 3x = \\ & = \frac{1}{5}[x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)] - 3x^2 - 3x = \frac{1}{5}[\cancel{x^3} + \underline{9x^2} + \underline{27x} + \underline{27} - \cancel{x^3} - \underline{6x^2} - \underline{12x} + \underline{8}] - 3x^2 - 3x = \\ & = \frac{1}{5}[15x^2 + 15x + 35] - 3x^2 - 3x = \cancel{3x^2} + \underline{3x} + \underline{7} - \cancel{3x^2} - \underline{3x} = 7 \end{aligned}$$

ESERCIZI

- 1) $(y+1)^3$ con verifica per $y=1$ 2) $(y+2)^3$ con verifica per $y=1$ 3) $(y+3)^3$ con verifica per $y=1$
 4) $(y-4)^3$ con verifica per $y=1$ 5) $(y-z)^3$ e verifica per $y=5, z=4$ 6) $(2xy+1)^3$
 7) $(\frac{1}{3}a-x)^3$ 8) $(-\frac{1}{2}s+\frac{2}{3}t)^3$ 9) $(-\frac{1}{4}h-2)^3$ 10) $(\frac{1}{5}a^2-\frac{1}{2}a)^3$ 11) $(\frac{3}{2}x^m+\frac{2}{3}x^p)^3$ 12) $(a+a^k)^3$

RISULTATI

- 1) $y^3 + 3y^2 + 3y + 1$ 2) $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ 3) $y^3 + 9y^2 + 27y + 27$
 4) $y^3 - 12y^2 + 48y - 64$ 5) $y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$ 6) $8x^3y^3 + 12x^2y^2 + 6xy + 1$
 7) $\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{3}a^2x + ax^2 - x^3$ 8) $-\frac{1}{8}s^3 + \frac{1}{2}s^2t - \frac{2}{3}st^2 + \frac{8}{27}t^3$ 9) $-\frac{1}{64}h^3 - \frac{3}{8}h^2 - 3h - 8$
 10) $\frac{1}{125}a^6 - \frac{3}{50}a^5 + \frac{3}{20}a^4 - \frac{1}{8}a^3$ 11) $\frac{27}{8}x^{3m} + \frac{9}{2}x^{2m+p} + 2x^{m+2p} + \frac{8}{27}x^{3p}$ 12) $a^3 + 3a^{2+k} + 3a^{1+2k} + a^{3k}$