16. QUARTA, QUINTA, … n-ESIMA POTENZA DI UN BINOMIO

$$\boxed{(a+b)^4}=(a+b)^3(a+b)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=$$
$$=a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4=\boxed{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$$

$$\boxed{(a+b)^5}=(a+b)^4(a+b)=\left(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\right)(a+b)=$$
$$=a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4+a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5=\boxed{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$$

$$\boxed{(a+b)^6}=(a+b)^5(a+b)=...=\boxed{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$$

ecc. ecc.

Vediamo così che le formule per le **potenze di un binomio** presentano un aspetto armonioso e regolare.

Si ha, in generale, $\boxed{(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+...+nab^{n-1}+b^n}$, ossia:

lo sviluppo di $(a+b)^n$
- **comincia da a^n**
- e **prosegue poi secondo le potenze decrescenti di *a* e crescenti di *b*, fino a terminare con b^n**;
- **il polinomio è omogeneo**, perché questo decrescere dell'esponente di *a*, abbinato al simultaneo crescere dell'esponente di *b*, fa sì che il grado dei vari termini si mantenga sempre uguale a n;
- inoltre, si osserva che **il secondo e il penultimo coefficiente valgono n.**

Ciò permetterebbe di ricordare le varie formule senza fatica, se non fosse per i coefficienti intermedi:
… quelli, non è affatto facile tenerli a mente!

Ci domandiamo allora:
esiste un metodo comodo per ricostruire rapidamente pure i coefficienti intermedi?

Cominciamo con l'osservare che lo sviluppo di $(a+b)^4$ viene ricavato da quello (già noto) di $(a+b)^3$;
allo stesso modo, lo sviluppo di $(a+b)^5$ viene ricavato da quello (già noto) di $(a+b)^4$, e così via.

Prendiamo ora, per esempio, il calcolo tramite il quale $(a+b)^5$ viene "generato" a partire da $(a+b)^4$.
Si scrive $(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)$, dopodiché si sviluppa $(a+b)^4$ e infine si svolge il prodotto:
i monomi di $(a+b)^4$ vengono moltiplicati prima tutti per a poi tutti per b,
e da ultimo si riducono i termini simili.

Riprendiamo in esame la moltiplicazione $(a+b)^4(a+b)$, ponendo particolare attenzione sui coefficienti,
e andando a capo in modo "furbo", affinché i monomi simili risultino incolonnati. Avremo:

$$
\begin{array}{rllllll}
(a+b)^5 & =(a+b)^4(a+b)=(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b)= \\
= & \underbrace{\left(\boxed{1}a^4 \quad +\boxed{4}a^3b \quad +\boxed{6}a^2b^2 \quad +\boxed{4}ab^3 \quad +\boxed{1}b^4\right)}_{\text{sviluppo di }(a+b)^4}(a+b)= \\
= & 1a^5 & +4a^4b & +6a^3b^2 & +4a^2b^3 & +1ab^4 & \\
 & & +1a^4b & +4a^3b^2 & +6a^2b^3 & +4ab^4 & +1b^5 \\
\hline
= & \boxed{1}a^5 & +\boxed{\underset{4+1}{5}}a^4b & +\boxed{\underset{6+4}{10}}a^3b^2 & +\boxed{\underset{4+6}{10}}a^2b^3 & +\boxed{\underset{1+4}{5}}ab^4 & +\boxed{1}b^5
\end{array}
$$
sviluppo di $(a+b)^5$

Possiamo a questo punto rilevare un fatto molto interessante:
i coefficienti dello sviluppo di una potenza di binomio sono tali che ognuno di essi
(a parte il primo e l'ultimo, che sono unitari)
è ricavabile sommando due opportuni coefficienti, relativi alla potenza precedente!

Ad esempio, il secondo coefficiente del nostro risultato (sto pensando al coefficiente 5 del termine $5a^4b$)
è ottenuto sommando 4 e 1, che sono poi il secondo e il primo coefficiente, relativi alla potenza precedente.
Analogamente, il terzo coefficiente del nostro risultato (mi riferisco al coefficiente 10 del termine $10a^3b^2$)
è ottenuto sommando 6 e 4, che sono poi il terzo e il secondo coefficiente, relativi alla potenza precedente.

Bene! **Abbiamo così trovato il metodo per ricostruire rapidamente i vari coefficienti successivi!**

Ogni coefficiente (a parte il primo e l'ultimo, unitari)
si può ricavare sommando due opportuni coefficienti, relativi alla potenza precedente,
e per l'esattezza:
- ♪ **il coefficiente di ugual posto (nella potenza precedente)**
- ♫ **e il coefficiente che precedeva quest'ultimo (sempre nella potenza precedente).**

Ad es., i coeff. di $(a+b)^6$ *potranno essere ricavati istantaneamente partendo dai coeff. di* $(a+b)^5$*, che sono*

$\boxed{1}\quad \boxed{5}\quad \boxed{10}\quad \boxed{10}\quad \boxed{5}\quad \boxed{1}$.

Basterà scrivere la sequenza di numeri

$\boxed{1}\quad 1+5=\boxed{6}\quad 5+10=\boxed{15}\quad 10+10=\boxed{20}\quad 10+5=\boxed{15}\quad 5+1=\boxed{6}\quad \boxed{1}$

dopodiché sarà sufficiente appiccicare a ciascun coefficiente la parte letterale corretta per ottenere

$$(a+b)^6 = a^6 + \boxed{6}a^5b + \boxed{15}a^4b^2 + \boxed{20}a^3b^3 + \boxed{15}a^2b^4 + \boxed{6}ab^5 + b^6$$

Ricapitoliamo. **L' n-esima potenza di un binomio è un polinomio con le seguenti caratteristiche:**
- **è di grado n**
- **è omogeneo (= tutti i suoi termini hanno lo stesso grado)**
- **è ordinato secondo le potenze decrescenti del primo termine e crescenti del secondo termine**
- **contiene n+1 termini**
- **il suo primo e il suo ultimo coefficiente valgono 1**
- **il suo secondo e il suo penultimo coefficiente valgono n**
- **i coefficienti intermedi** possono essere ricavati tenendo presente che ogni coeff. è uguale alla somma
  - ♪ fra il coefficiente di ugual posto, dello sviluppo precedente,
  - ♫ e il coefficiente che, sempre nello sviluppo precedente, precedeva quest'ultimo.

  A tale scopo, i vari coefficienti possono essere organizzati in un apposito schema,
  detto **"Triangolo di Tartaglia"** (Niccolò Fontana detto il Tartaglia, algebrista italiano, 1499-1557),
  nel quale ogni numero di ciascuna fila orizzontale
  (tranne il primo e l'ultimo, che sono uguali a 1) **è calcolato come somma dei due che lo sovrastano.**

Per **costruire il Triangolo di Tartaglia**,
possiamo immaginarlo come un **albero di Natale**.
In alto, **sul cucuzzolo, ci mettiamo un 1**.

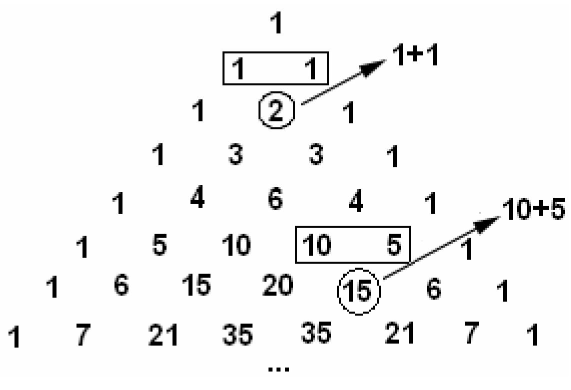
Ora **scendiamo lungo le pendici dell'albero,**
scrivendo (seconda riga) un 1 e poi un altro 1.

Scendiamo ancora: siamo sulla **terza riga**;
come primo elemento della riga scriviamo un 1;
poi, dato che sopra di noi troviamo una coppia di 1,
scriviamo un 2 (1 + 1 = 2).
Terminiamo la riga con un 1.

Abbiamo così costruito i coefficienti (1, 2, 1) di (a+b)^2**.**

Scendiamo ancora, ed ecco che,
procedendo allo stesso modo,
si generano i coefficienti (1, 3, 3, 1) di (a+b)^3

E così per le righe successive.



Secondo te, si può dare un significato
anche alla seconda riga **(1, 1)**
del triangolo di Tartaglia?
E al cucuzzolo?

Dal "Triangolo di Tartaglia" otteniamo, dunque, le **formule**:

$$(a+b)^4 = a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + \mathbf{6}a^5b + \mathbf{15}a^4b^2 + \mathbf{20}a^3b^3 + \mathbf{15}a^2b^4 + \mathbf{6}ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + \mathbf{7}a^6b + \mathbf{21}a^5b^2 + \mathbf{35}a^4b^3 + \mathbf{35}a^3b^4 + \mathbf{21}a^2b^5 + \mathbf{7}ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + \mathbf{8}a^7b + \mathbf{28}a^6b^2 + \mathbf{56}a^5b^3 + \mathbf{70}a^4b^4 + \mathbf{56}a^3b^5 + \mathbf{28}a^2b^6 + \mathbf{8}ab^7 + b^8$$

ecc. ecc.

Esempi di applicazione:

a) $\boxed{(3x+2)^4} = 81x^4 + 4\cdot 27x^3\cdot 2 + 6\cdot 9x^2\cdot 4 + 4\cdot 3x\cdot 8 + 16 = \boxed{81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16}$

b) $\boxed{\left(x^2-2\right)^5} = \left(x^2\right)^5 + 5\cdot\left(x^2\right)^4(-2) + 10\cdot\left(x^2\right)^3(-2)^2 + 10\cdot\left(x^2\right)^2(-2)^3 + 5\cdot x^2(-2)^4 + (-2)^5 =$

$= \boxed{x^{10} - 10x^8 + 40x^6 - 80x^4 + 80x^2 - 32}$

c) $\boxed{\left(\frac{1}{2}a-1\right)^6} = \frac{1}{64}a^6 + 6\cdot\frac{1}{32}a^5\cdot(-1) + 15\cdot\frac{1}{16}a^4\cdot(+1) + 20\cdot\frac{1}{8}a^3\cdot(-1) + 15\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot(+1) + 6\cdot\frac{1}{2}a\cdot(-1) + 1 =$

$= \boxed{\frac{1}{64}a^6 - \frac{3}{16}a^5 + \frac{15}{16}a^4 - \frac{5}{2}a^3 + \frac{15}{4}a^2 - 3a + 1}$

d) $\boxed{(-x-3)^4} = (-x)^4 + 4\cdot(-x)^3\cdot(-3) + 6\cdot(-x)^2\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-x)\cdot(-3)^3 + (-3)^4 =$

$= x^4 + 4\cdot\left(-x^3\right)\cdot(-3) + 6\cdot x^2\cdot 9 + 4\cdot(-x)\cdot(-27) + 81 = \boxed{x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81}$

e) $\boxed{(-2a-b)^5} = (-2a)^5 + 5\cdot(-2a)^4\cdot(-b) + 10\cdot(-2a)^3\cdot(-b)^2 + 10\cdot(-2a)^2\cdot(-b)^3 + 5\cdot(-2a)\cdot(-b)^4 + (-b)^5 =$

$= -32a^5 + 5\cdot 16a^4\cdot(-b) + 10\cdot\left(-8a^3\right)\cdot b^2 + 10\cdot 4a^2\cdot\left(-b^3\right) + 5\cdot(-2a)\cdot b^4 - b^5 =$

$= \boxed{-32a^5 - 80a^4b - 80a^3b^2 - 40a^2b^3 - 10ab^4 - b^5}$

f) $\boxed{\left(a^x+a^y\right)^4} = a^{4x} + 4\cdot a^{3x}\cdot a^y + 6\cdot a^{2x}\cdot a^{2y} + 4\cdot a^x\cdot a^{3y} + a^{4y} =$

$= \boxed{a^{4x} + 4a^{3x+y} + 6a^{2x+2y} + 4a^{x+3y} + a^{4y}}$

OSSERVAZIONE

I termini dello sviluppo dell' n-esima potenza di un binomio hanno sempre **segni**:

- **TUTTI UGUALI** fra loro (se i coefficienti dei due termini di partenza sono **concordi**)
  $+ \; + \; + \; + \; \ldots$ *oppure* $- \; - \; - \; - \; \ldots$
- o altrimenti **ALTERNI** (se i coefficienti dei due termini di partenza sono **discordi**)
  $+ \; - \; + \; - \; \ldots$ *oppure* $- \; + \; - \; + \; \ldots$

Basterà perciò determinare il PRIMO di questi segni (che dipende dal segno del primo fra i due coefficienti nel binomio, e dal fatto se l'esponente sia pari o dispari) per avere la corretta sequenza dei segni finali.

ESERCIZI

1) $(t-3)^4$ *con verifica ponendo* $t=1$
2) $(5x+2y)^4$ *Verifica per* $x=1,\; y=-2$
3) $(2a^2-a)^4$ *Due verifiche, con* $a=1$ *e* $a=-1$
4) $(t+10)^5$ *Verifica con* $t=-10$
5) $(x-3y)^5$ *Verifica con* $x=y=1$
6) $(-1-b^3)^5$ *Verifica con* $b=-1$
7) $(1+c)^6$ *Verifica con* $c=-1$ *e con* $c=1$
8) $(-1+c)^6$ *Verifica con* $c=1$ *e con* $c=2$
9) $(p-2)^6$ *Verifica con* $p=1$
10) $(-1+w)^9$ *Verifica con* $w=1$

RISULTATI

1) $t^4 - 12t^3 + 54t^2 - 108t + 81$
2) $625x^4 + 1000x^3y + 600x^2y^2 + 160xy^3 + 16y^4$
3) $16a^8 - 32a^7 + 24a^6 - 8a^5 + a^4$
4) $t^5 + 50t^4 + 1000t^3 + 10000t^2 + 50000t + 100000$
5) $x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$
6) $-1 - 5b^3 - 10b^6 - 10b^9 - 5b^{12} - b^{15}$
7) $1 + 6c + 15c^2 + 20c^3 + 15c^4 + 6c^5 + c^6$
8) $1 - 6c + 15c^2 - 20c^3 + 15c^4 - 6c^5 + c^6$
9) $p^6 - 12p^5 + 60p^4 - 160p^3 + 240p^2 - 192p + 64$
10) $-1 + 9w - 36w^2 + 84w^3 - 126w^4 + 126w^5 - 84w^6 + 36w^7 - 9w^8 + w^9$