18. ESPRESSIONI CON PRODOTTI NOTEVOLI

Esempi svolti:

A) $\boxed{9(2a+b)^2-(6a-b)^2-8b(6a+b)}=9\left(4a^2+4ab+b^2\right)-\left(36a^2-12ab+b^2\right)-48ab-8b^2=$

$$=\cancel{36a^2}\cancel{+36ab}\cancel{+9b^2}\cancel{-36a^2}\cancel{+12ab}\cancel{-b^2}\cancel{-48ab}\cancel{-8b^2}=\boxed{0}$$

B) $\boxed{\left\{\frac{1}{8}\left[(2x+3y)(2x-3y)-(2x-y)(2x+y)\right]+1\right\}^2+2y^2}=$

$$=\left\{\frac{1}{8}\left[4x^2-9y^2-\left(4x^2-y^2\right)\right]+1\right\}^2+2y^2=\left\{\frac{1}{8}\left[\cancel{4x^2}-9y^2\cancel{-4x^2}+y^2\right]+1\right\}^2+2y^2=$$

$$=\left\{\frac{1}{8}\left[-8y^2\right]+1\right\}^2+2y^2=\left(-y^2+1\right)^2+2y^2=y^4\cancel{-2y^2}+1\cancel{+2y^2}=\boxed{y^4+1}$$

ESERCIZI (la freccia, se c'è, è un link verso la correzione)

1) $(x-3y)^2-2x(13x-33y)+(5x-6y)^2$

2) $7(a-1)^2+2(a+2)^2-(3a-1)^2$

3) $4ab+(a-b)^2-(a+b)^2$

4) $3\left(k^2+5\right)-(k+3)^2-(k-1)^2-(k-2)^2$

5) $\left(x+\frac{5}{6}y\right)^2-\frac{1}{3}y\left(2x+\frac{13}{6}y\right)+\left(3x-\frac{1}{6}y\right)^2$

6) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a^3\right)^2-\frac{1}{4}a^3\left(a^3-\frac{4}{3}a\right)+\frac{8}{9}a^2$

7) $\frac{1}{14}\left[8(x-1)(x+2)-2(x+1)^2-6(x-2)^2\right]+3$

8) $\frac{1}{2}\left[\left(a^5+1\right)^2+\left(a^5+3\right)^2\right]-\left(a^5+7\right)\left(a^5-3\right)$

9) $\left[(a-10b)^2-3(2a-5b)^2-5\left(5b^2-2a^2\right)\right]^2+10\cdot(2a)^3\cdot b$ ⇨

10) $\frac{1}{2}\left[(-2+x)^2+(-2-x)^2\right]\left(x^2-3\right)-\left(x^2+2\right)\left(x^2-6\right)$ ⇨

11) $\left(-y^2-1\right)^2\left[2(-4+y)^2-(y-8)^2+31\right]^2$ ⇨

12) $\left(3a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a+1\right)\left(1+\frac{1}{2}a\right)-(a-1)^2-\frac{1}{4}\left(a^2+1\right)$ ⇨

13) $(3y-1)\left[y(y+1)-(y+3)(y+3)\right]-5(1-y)(3y+1)+4(8y-1)$

14) $\left(a^x-a\right)^2$ 15) $\left(x^{k+1}+x^{k-1}\right)^2$ 16) $\left(3y^{k+1}+5y^{3k-2}\right)^2$ 17) $\left(x^p y^{p+1}-x^{3p}y\right)^2$ 18) $\left(a^{3n}-a^4b^n\right)^2$

19) $(a+1)(a-1)+(a+2)(a-2)+(a+3)(a-3)+(a+4)(a-4)+(a+5)(a-5)$

20) $4(x+2y)(x-2y)+(x+4y)^2-5x^2$

21) $(5a-4b)(5a+4b)-(3a+5b)(3a-5b)-(4a-3b)^2$ ⇨

22) $4(3a-5)(5+3a)-4(-3a+1)^2-(a+4)(a-26)+a^2$

23) $(2x-1)(1+2x)+(1+2x)(2x+1)$

24) $\left(\frac{5}{3}xy+3z\right)\left(\frac{5}{3}xy-3z\right)-\frac{1}{9}(5xy-6z)^2+13z^2-\frac{17}{3}xyz$

25) $2a^2+(a-1)^2(a+1)^2$

26) $\left[\left(\frac{1}{3}w+1\right)^2-\left(\frac{1}{3}w-1\right)^2+\left(-\frac{1}{3}w+1\right)\left(-\frac{1}{3}w-1\right)-\frac{4}{3}w\right]\left(\frac{1}{9}w^2+1\right)+1$ ⇨

27) $\left[2(5n+1)\left(\frac{1}{5}n-\frac{1}{6}\right)-2\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{15}n\right]^2-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}-3n\right)$ ⇨

28) $a^2+(a+3)(-a-3)+3(2a+3)$ ⇨

29) $(2a+3)^2-(-2a-3)^2$

30) $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)-(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)$

31) $1+\left[8a^2-(2a-1)(2a+1)\right](2a\cdot 2a-1)-(-2a)^4$

32) $\left\{\left[(b+3)(b-3)\left(b^2+9\right)+80\right]\left[(b+4)(b-4)\left(b^2+16\right)+257\right]\right\}^2+2b^8$

33) $\left(3a^{3n}+2a^{n+1}\right)\left(3a^{3n}-2a^{n+1}\right)$

34) $\left(1-a^k\right)\left(1+a^k\right)\left(1+a^{2k}\right)\left(1+a^{4k}\right)\left(1+a^{8k}\right)$

35) $(a-b+1)^2-(a+b-1)^2-4a(1-b)$ 36) $(3x-2y-1)^2-(3x+2y)^2+2(12xy+3x-2y)$

37) $(5a-b-1)^2-2(1-5a)(1+b)-(b-1)(b+1)-(-5a)^2$

38) $\frac{1}{2}\left[(a-2b+3c)^2+(a+2b-3c)^2+24bc\right]$ 39) $(x-1)^2(x-2)^2-(x^2-3x+2)^2$ ⇨

40) $(x^3-x^2+x-1)^2+2x(x^2+1)^2-3x^2(x^2+1)$ 41) $(a+b-c-d)^2-(c+d-b)^2-a\left[a+2(b-c-d)\right]$

42) $\left[(b^k-1)(b^{2k}-1)+b^{2k}\right]^2+b^k\left[2(b^{3k}+1)-b^k(b^k+1)\right]$

43) $(x-2)^3-(x+1)^3+9(x^2-x+1)$ 44) $\left\{(2x-1)^3-\left[6x(1-2x)-1\right]\right\}:8$

45) $(2-t)^3-(1-t)^3-3t(t-3)$ 46) $5x^2+\frac{1}{15}\left[(5x-2)^3-(5x-1)^3+7\right]$

47) $\left[(b+1)^3-(-b+1)^3\right]:2-3b$ 48) $(a+y)^3+(a-y)^3+(-a+y)^3+(-a-y)^3$

49) $\left[(x^2+4x-1)^2-8x(x-1)(x+1)-14x^2\right]^3-x^4(x^4+1)(x^4+2)$

50) $(a^2-1)^3-(a+1)^3(a-1)^3$ 51) $\left[(y-2)^4-(y+2)^4+64y\right]:(-16y^2)$

52) $(x^2+1)^4-x^2(x^2-1)^3-x^2(7x^4+3x^2+5)$ 53) $-2\left[(-2ab)^2+1\right]+\left[(2ab+1)^4-(4a^2b^2-ab+1)^2\right]:(5ab)$

54) $(a+1)^4-(a-1)^4-8a(a^2+1)$ 55) $1+(a-1)^5+5a\left[a(a^2+2)-(2a^2+1)\right]$

56) $\left[(x+2y)^5+(x-2y)^5\right]:(2x)-40y^2(x^2+2y^2)$

57) $9(2x-1)^2-(6x-7)^2-8(6x-5)$ 58) $-(10+x)^2+(8-x)^2-36(-1-x)$

59) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)^2-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{1}{2}ab$ 60) $2c+(-11c+3)^2-\left[9(-4c+1)^2+8c(1-3c)\right]$

61) $37-(4s-1)^2+4(2s+3)(2s-3)$ 62) $(3-n)(3+n)(9+n^2)-(2+n)(2-n)(4+n^2)$

63) $\frac{1}{4}\left[(3x^2+2)^2-(3x^2-4)(3x^2+4)\right]-3x^2$ 64) $2w^3-9w^2\left(\frac{1}{9}w-1\right)\left(\frac{1}{9}w+1\right)+\left(\frac{1}{3}w^2-3w\right)^2$

65) $(a^2-a-1)^2-(a+2)^2(a-1)^2+(2a-1)(2a^2-3)$ 66) $(x^4-x^2-1)^2+x^2\left[2(x^2+1)-x^2(x^2-1)^2\right]-1$

67) $45+(x^2+3)(x^2-3)-\left[(-x^2+x-5)^2-11(x-1)(x+1)\right]$

68) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2-\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+2\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x+2\right)$ 69) $(a-b+3)^2+(3a-b+1)^2-2\left[5(a^2+1)+b^2-4ab\right]+8b$

70) $\left[-\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}x\right)^2+4x^2\left(\frac{1}{3}x+y-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{4}{3}x^2y\left(2x-\frac{15}{2}\right)\right]:(-2x)^2$

71) $2\left[a+(b-1)\cdot c\right]+(a+b-c-1)^2-(c-a)^2-(1-b)^2$ 72) $(a+1)^3-(a+2)^3+(a-1)^3-(a-2)^3$

73) $(t^4-t^3+2t^2-3t)^2-t^2(t^2-2t+3)^2+2t^5(t^2-2t+3)$ 74) $\left[(x+y)^3-(-x+y)^3\right]:(2x)$

75) $(7c-2d)^3-(5c-2d)^3+24cd(6c-d)$ 76) $(8a^6-1)^2+4a^4\left[3+4a^2(3a^2+1)\right]-(4a^4+1)^3$

77) $\frac{1}{3}\left[(a+a^2b)^3-a^3(1+a^3b^3)\right]$ 78) $2t+\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t+1\right)-\left[\left(\frac{1}{2}t-1\right)^3+2\right]\right\}$

79) $\dfrac{\dfrac{(2e^2-f)^3+f^3}{2e^2}-(2e^2-f)^2}{2}+e^2f$ 80) $\dfrac{ab(23a+61b)-\left[-(-3a+b)^3+b(-2a+3b)^2\right]+(3a+2b)^3}{100ab}$

81) $\dfrac{(r^4+r^2)^3-(r^6-r^3)^2-r^8(r^2+1)}{2}$ 82) $\frac{1}{15}\left\{124(1+b\cdot b^2)+\left[2b-(5+b)\right]^3+(-5b-1)^3+2\right\}$

83) $\left(2a^x-3a^y\right)^2$ 84) $a^{x+1}+\left(a^x-a\right)^2-a^2$ 85) $\left(-a^x+a\right)^3$ 86) $\left(a^x\right)^x-\left(a^x-1\right)^2\left(a^x+1\right)^2-\left(a^{x^2}+2a^{2x}\right)$

87) $(3a-2)^2-2(a-2)(2a-5)-5(a-2)(a+2)-2(3a+2)$ 88) $\left(x^2+x-1\right)^2-\left(x^2+x\right)^2+2x(x+1)$

89) $(3a-2)^3+18a(3a-2)+8$ 90) $15+(3a-1)^4-(3a-2)^2(3a+2)^2+6a\left(18a^2-21a+2\right)$

91) Dimostra che la differenza dei quadrati di 2 interi consecutivi è uguale alla somma di quegli stessi numeri

92) Qual è il secondo termine dello sviluppo di $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^{1000}$?

93) Se $\mathrm{A}=k+10$ e $\mathrm{B}=k-2$, allora:
I) $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=?$ II) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})=?$ III) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2=?$ IV) $\mathrm{A}^2+2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2=?$

94) Spiega perché i numeri 1331 1030301 1003003001 1000300030001 ... sono tutti cubi perfetti, e determina gli interi dei quali essi sono cubi (Indicazione: ad esempio, $1331=10^3+3\cdot 10^2+...=...$)

95) Se il lato di un quadrato misura a cm e viene accorciato di m cm, di quanti cm^2 diminuisce l'area?
a) m^2-2am b) m^2 c) $2am-m^2$ d) a^2+m^2-2am

96) Il lato di un cubo misura a cm. Se misurasse m centimetri in più, di quanto aumenterebbe la superficie totale del cubo? E di quanto aumenterebbe il suo volume?

97) Determina il lato di un quadrato sapendo che aumentandolo di 1 cm, oppure diminuendolo di 1 cm, le due rispettive aree differirebbero di $204\ \mathrm{cm}^2$ (si risponde risolvendo una semplicissima equazione)

98) Qual è il 3° termine da sinistra nello sviluppo di $(a+a^{-1})^{10}$? Voglio dire: $(a+a^{-1})^{10}=a^{10}+...+\ ?+...$

99) Scrivi il prodotto notevole che, se viene svolto, dà come risultato $81x^4-49$

100) Determina il quadrato di binomio il cui sviluppo è
a) $81x^2-36x+4$ b) $x^4+121x^2-22x^3$ c) $4+4x^3+x^6$

101) $4a^2+12ab+9b^2+16c^2-16ac-24bc$ è un polinomio che si ottiene eseguendo un quadrato di trinomio. Sapresti risalire al prodotto notevole di partenza?

102) $x^4-2x^3-x^2+2x+1$ è un polinomio che si ottiene eseguendo un quadrato di trinomio poi riducendo due termini simili. Sapresti risalire al prodotto notevole di partenza?

103) Quale dei seguenti polinomi NON è lo sviluppo di un quadrato di binomio?
a) $x^2+8x+16$ b) $x^2-14x+49$ c) $x^2+12x+144$ d) $x^2+25-10x$ e) $1+6x^4+9x^8$

104) $x^8+4x^4+...$ Completa col termine mancante, in modo che il trinomio ottenuto sia uguale al quadrato di un binomio. Ci sono DUE POSSIBILITÀ: sapresti scriverle entrambe?

105) Sapendo che $876\cdot 874=765624$, stabilisci senza far calcoli qual è il risultato dell'operazione 875^2.

106) Determina il risultato dell'operazione $857239^2-857243\cdot 857235$ evitando calcoli impegnativi.

107) Se al quadrato di un qualsiasi numero intero si aggiunge il sestuplo dell'intero successivo, poi si addiziona ancora 3 al risultato così ottenuto, in tal modo si ottiene certamente un quadrato perfetto. Giustifica, con una catena di uguaglianze basata sul calcolo letterale, questa affermazione.

108) Se si prende un qualsiasi numero intero, e gli si somma il suo quadrato, poi anche il consecutivo del numero di partenza, si ottiene in tal modo sempre un quadrato perfetto. Dimostra questa affermazione.

109) Se si prende un qualsiasi numero intero, e dal suo quadrato si sottrae il quadrato dell'intero precedente, diminuito di 1, poi si divide per 2 ciò che si è ottenuto, si ritorna sempre all'intero di partenza! Dimostra la verità di questa affermazione.

Ad esempio:
$7\ \rightarrow\ \dfrac{49-(36-1)}{2}=7$

IL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEI POLINOMI

Due polinomi nella stessa variabile si dicono "identici" se, per qualunque valore attribuito alla variabile, i due polinomi assumono sempre ugual valore.
Il cosiddetto "**PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI**" afferma che **due polinomi sono identici se e soltanto se hanno lo stesso grado, e in essi sono uguali i coefficienti dei termini di ugual grado**.

110) Determina i valori dei due numeri a, b in modo che i due polinomi nella variabile x
$2x^2+(a+b)x+a$ e $2x^2+15x+2b$
siano identici, e determina il valore che tali polinomi identici assumono quando $x=4$

RISULTATI, RISPOSTE

1) $45y^2$ 2) 14 3) 0 4) 1 5) $10x^2$ 6) a^2 7) $2x$ 8) 26 9) $a^4+1600a^2b^2$ 10) $5x^2$ 11) y^8-2y^4+1
12) $8a^2$ 13) 0 14) $a^{2x}-2a^{x+1}+a^2$ 15) $x^{2k+2}+2x^{2k}+x^{2k-2}$ 16) $9y^{2k+2}+30y^{4k-1}+25y^{6k-4}$
17) $x^{2p}y^{2p+2}-2x^{4p}y^{p+2}+x^{6p}y^2$ 18) $a^{6n}-2a^{3n+4}b^n+a^8b^{2n}$ 19) $5a^2-55$ 20) $8xy$ 21) $24ab$
22) $46a$ 23) $8x^2+4x$ 24) xyz 25) a^4+1 26) $(1/81)w^4$ 27) n^2 28) 0 29) 0 30) 15
31) 0 32) $b^{16}+1$ 33) $9a^{6n}-4a^{2n+2}$ 34) $1-a^{16k}$ 35) 0 36) 1 37) 0 38) $a^2+4b^2+9c^2$ 39) 0
40) x^6+1 41) 0 42) $b^{6k}+b^{3k}+1$ 43) 0 44) x^3 45) 7 46) $3x$ 47) b^3 48) 0 49) x^4+1 50) 0
51) y 52) 1 53) $3ab$ 54) 0 55) a^5 56) x^4 57) 0 58) 0 59) ab 60) c^2 61) $8s$ 62) 65 63) 5
64) $18w^2$ 65) 0 66) $4x^2$ 67) $2x^3+10x$ 68) $2y$ 69) $12a$ 70) y^2+y 71) $2ab$ 72) $-18a$ 73) t^8
74) x^2+3y^2 75) $218c^3$ 76) 0 77) $a^4b+a^5b^2$ 78) t^2 79) f^2 80) $a+b$ 81) $r^{10}+r^9+r^8$ 82) $4b-6b^2$
83) $4a^{2x}-12a^{x+y}+9a^{2y}$ 84) $a^{2x}-a^{x+1}$ 85) $-a^{3x}+3a^{2x+1}-3a^{x+2}+a^3$ 86) $-a^{4x}-1=-\left(a^{4x}+1\right)$
87) 0 88) 1 89) $27a^3$ 90) 0 91) $(x+1)^2-x^2=\cancel{x^2}+2x+1\cancel{-x^2}=x+(x+1)$ 92) $1000x^{1996}$
93) I) $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=(k+10)^2-(k-2)^2=k^2+20k+100-k^2+4k-4=24k+96$
II) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})=(k+10+k-2)(k+10-k+2)=(2k+8)\cdot 12=24k+96$
III) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2=(2k+8)^2=4k^2+32k+64$ IV) $\mathrm{A}^2+2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2=\ldots=4k^2+32k+64$
94) $1331=10^3+3\cdot 10^2+3\cdot 10+1=(10+1)^3=11^3$; $1030301=10^6+3\cdot 10^4+3\cdot 10^2+1=(10^2+1)^3=101^3$
$1003003001=1001^3$; $1000300030001=10001^3$
95) c), perché $a^2-(a-m)^2=a^2-\left(a^2-2am+m^2\right)=\ldots$
96) $6(a+m)^2-6a^2=12am+6m^2$; $(a+m)^3-a^3=3a^2m+3am^2+m^3$ 97) 51 cm
98) $45a^6$ 99) $\left(9x^2+7\right)\left(9x^2-7\right)$ 100a) $(9x-2)^2$ *oppure* $(-9x+2)^2=(2-9x)^2$
100b) $(x^2-11x)^2$ *oppure* $(-x^2+11x)^2=(11x-x^2)^2$ 100c) $(2+x^3)^2=(x^3+2)^2$
101) $(2a+3b-4c)^2$ *opp.* $(-2a-3b+4c)^2=(4c-2a-3b)^2$ 102) $(x^2-x-1)^2$ *opp.* $(-x^2+x+1)^2=(1+x-x^2)^2$
103) c): $(x+12)^2=x^2+\mathbf{24}x+144$ 104) $+4$; $+4x^6$ 105) 765625. Infatti $876\cdot 874=(875+1)(875-1)=875^2-1$
106) $857239^2-857243\cdot 857235=857239^2-\left(857239+4\right)\left(857239-4\right)=857239^2-857239^2+16=16$
107) $n^2+6\left(n+1\right)+3=n^2+6n+6+3=n^2+6n+9=(n+3)^2$, *quadrato di un intero ossia "quadrato perfetto"*
108) Qualunque sia l'intero n, è sempre $n+n^2+(n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$
109) $\dfrac{n^2-[(n-1)^2-1]}{2}=\dfrac{n^2-[n^2-2n\cancel{+1}\cancel{-1}]}{2}=\dfrac{\cancel{n^2}\cancel{-n^2}+2n}{2}=n$ 110) $a=10,\ b=5;\ 102$

VERIFICHE DI IDENTITA'

Cos'è un' "*identità*"? E' un'uguaglianza letterale, vera per tutti i valori "ammissibili" delle lettere coinvolte (gli eventuali valori "non ammissibili" sono quelli che darebbero luogo a un'operazione non eseguibile: ad esempio, l'identità $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{a(a+1)}$ vale per $a\neq 0,\ a\neq -1$, ossia vale tutti i valori di a TRANNE i valori 0 e -1, non ammissibili perché renderebbero un denominatore uguale a 0).

Esempio svolto A) *Verifica che vale la seguente identità*: $\boxed{\left(2x+1\right)^2+x^2=\left(5x+1\right)\left(x+1\right)-2x}$

Eseguo i calcoli ai due membri, per constatare che si ottenga il medesimo risultato:

$\underline{4x^2}+4x+1\underline{+x^2}=\underline{5x^2}\,\underline{\underline{+5x}}\,\underline{\underline{+x}}+1\,\underline{\underline{-2x}}$; $5x^2+4x+1=5x^2+4x+1$, *OK*!!!

Esempio svolto B)

Verifica che vale la seguente identità:

$\boxed{\left(a+b\right)\left(a+c\right)=\left(a-b\right)\left(a-c\right)+2a\left(b+c\right)}$

$\cancel{a^2}+ac+ab\cancel{+bc}=\cancel{a^2}\,\underline{-ac}\,\underline{\underline{-ab}}\cancel{+bc}\,\underline{\underline{+2ab}}\,\underline{+2ac}$

$ac+ab=ac+ab$ OK

(NOTA)

NOTA - Giannino ha svolto l'esercizio B) "a modo suo": nel secondo passaggio, avendo individuato a primo e a secondo membro coppie di termini uguali, le ha mandate via, come si fa nelle equazioni.

Il procedimento seguito da Giannino appare certamente comodo, ma … sarà corretto? Sì, è correttissimo!!! Infatti, riflettiamo:
se è vera l'uguaglianza "semplificata"
□ + $\cancel{\triangle}$ = ○ + $\cancel{\triangle}$,
allora vuol dire che era vera anche l'uguaglianza di partenza
□+△= ○+△ !!!