I PRODOTTI NOTEVOLI E LA DILATAZIONE TERMICA DEI SOLIDI

Le molecole di cui è fatta una sostanza sono in continuo e perenne movimento.
Se si tratta di un solido esse vibrano avanti e indietro intorno a una posizione di equilibrio, nel caso di un gas si hanno invece spostamenti casuali in tutte le direzioni.
E **una sostanza al crescere della sua temperatura si espande**.
Infatti, se aumenta la temperatura, significa che aumenta la velocità media con cui le molecole si muovono; questo incremento della velocità media delle molecole determina un incremento delle vibrazioni e degli urti, quindi della distanza media fra le molecole stesse.
Per esempio, un binario ferroviario d'acciaio lungo 20 metri, quando la temperatura sale di 30 °C, subisce un allungamento di 7 centimetri circa: avrai forse notato che in una linea ferroviaria viene sempre lasciato un certo spazio fra un binario e quelli che lo precedono e lo seguono.
Nel caso del binario, una dimensione (la lunghezza) prevale nettamente sulle altre due, che rispetto ad essa sono trascurabili; nel caso di una lamiera sottile è invece trascurabile lo spessore.
Perciò, per quanto riguarda i solidi, si fa distinzione fra tre tipi di **dilatazione termica**:
a) **lineare**, quando l'effetto di dilatazione è apprezzabile praticamente soltanto nel senso della lunghezza;
b) **superficiale**;
c) **cubica**.
Prendiamo una barra di metallo di qualche metro di lunghezza e sezione trascurabile, e facciamola passare dalla temperatura di 0 °C a quella di t °C.
Vedremo che **l'allungamento della barra è pressappoco proporzionale a t** ; vale a dire, almeno per un ampio intervallo di temperature, se raddoppia la temperatura finale raddoppia all'incirca anche l'allungamento subìto; se triplica la temperatura finale, triplica grossomodo anche l'allungamento, ecc.
Vale cioè, almeno approssimativamente, la relazione

$$\boldsymbol{\ell - \ell_0 = \Delta\ell = \lambda \ell_0 t}\ .$$

- **Cosa significa quel simbolo Δ ("delta")?**
  E' un "**operatore di differenza**", è usato per indicare una differenza.
  - Ad esempio, due coniugi di età molto diverse, diciamo 50 anni e 24 anni, hanno un Δe grande: $\Delta e = e_2 - e_1 = 50 - 24 = 26$.
  - Se nel mio allenamento di corsa dopo 5' mi trovavo a 1 km da casa, e proseguendo nella stessa direzione dopo 20' mi trovavo a 4 km da casa, allora nell'intervallo di tempo (in minuti) $\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 5 = 15$ ho percorso uno spazio (in km) $\Delta s = s_2 - s_1 = 4 - 1 = 3$ quindi la velocità media del mio moto è stata
  $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3\ km}{15\ min} = 0,2\,\frac{km}{min} = 0,2\,\frac{km}{1/60\ h} = 12\ km/h$$

- **E che cos'è quel λ (lambda)?**
  E' un moltiplicatore fisso detto **"coefficiente di dilatazione lineare"**,
  il cui valore dipende dalle proprietà fisiche della sostanza di cui è fatta la barra.
  λ esprime la variazione di lunghezza "unitaria",
  ossia relativa ad una barra di 1 metro sottoposta a un incremento di temperatura di 1 grado centigrado.

Ora la nostra relazione $\boldsymbol{\ell - \ell_0 = \lambda \ell_0 t}$ può essere riscritta come

$$\boldsymbol{\ell = \ell_0 + \lambda \ell_0 t}$$

e infine, raccogliendo a fattor comune, cioè applicando la proprietà distributiva al contrario,

$$\boldsymbol{\ell = \ell_0 (1 + \lambda t)}$$

Bene … λ in generale è davvero molto piccolo!
Per l'acciaio, ad esempio, vale circa $1,1 \cdot 10^{-5}$ (la "dimensione fisica" di questa quantità è $°C^{-1}$), per il cemento circa $1,2 \cdot 10^{-5}$, per il vetro circa $9 \cdot 10^{-6}$.
Il fatto che λ sia *piccolo piccolo* entrerà in modo decisivo in quanto stiamo per dire ora.
Occupiamoci adesso di dilatazione "superficiale":
il nostro corpo ha due dimensioni nettissimamente prevalenti sulla terza, ad esempio è una lamina sottile dotata di una certa lunghezza e larghezza, rispetto alle quali lo spessore è trascurabile.
Siano dunque a_0 e b_0 le dimensioni della nostra lamina rettangolare, alla temperatura di 0 °C.
Se la sua temperatura aumenta fino a portarsi al valore t tali dimensioni diverranno rispettivamente:

$$a = a_0(1+\lambda t);\quad b = b_0(1+\lambda t)$$

Quanto varrà la superficie finale? Varrà

$$\boldsymbol{S = ab = a_0 b_0 (1+\lambda t)^2 = S_0(1 + 2\lambda t + \lambda^2 t^2)}\,.$$

Occhio adesso, perché è precisamente *qui* che si tiene conto del fatto che λ è piccolissimo: nell'espressione $\mathbf{1+2\lambda t+\lambda^2 t^2}$, **essendo $\lambda << 1$ il termine che contiene λ^2 potrà essere trascurato !!!**

- **$\lambda << 1$ significa: λ MOLTO MINORE di 1, molto piccolo rispetto a 1.**
  Ma se λ è un numero con questa caratteristica, quindi molto vicino a zero, λ^2 sarà molto ma molto minore di λ quindi il termine $\lambda^2 t^2$ sarà pochissimo rilevante nella somma.
  Pensa, ad esempio: se fosse $\lambda = 0{,}0001$, allora λ^2 varrebbe $0{,}00000001$.

Potendosi in pratica evitare di portarsi dietro la quantità $\lambda^2 t^2$, la relazione si potrà riscrivere come
$$S = S_0(1+2\lambda t)$$
senza apprezzabile perdita di precisione.

Pertanto il coeff. di dilatazione superficiale è circa uguale al doppio del coeff. di dilatazione lineare!

Nel caso della dilatazione *cubica* avviene qualcosa di analogo.
Consideriamo un parallelepipedo del nostro materiale, che alla temperatura di 0 °C abbia dimensioni a_0, b_0, c_0 e quindi volume $a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 = V_0$. Alla temperatura di t °C, le lunghezze degli spigoli diventeranno $a = a_0(1+\lambda t)$; $b = b_0(1+\lambda t)$; $c = c_0(1+\lambda t)$ per cui il nuovo volume sarà:
$$V = abc = a_0 b_0 c_0 (1+\lambda t)^3 = V_0(1+3\lambda t+3\lambda^2 t^2+\lambda^3 t^3)$$
Considerazioni analoghe a quelle fatte per la dilatazione superficiale ci portano a trascurare i termini contenenti λ^2 e λ^3, da cui la relazione approssimata:
$$V = V_0(1+3\lambda t)$$

Pertanto il coefficiente di dilatazione cubica è circa uguale al triplo del coeff. di dilatazione lineare.

ESERCIZI

1) Calcola il valore della quantità $(1+\alpha)^2 - 1$, per $\alpha = 0{,}002$
   a) in modo preciso b) trascurando, nello sviluppo del prodotto notevole, il termine di 2° grado.
   Di che percentuale differisce il valore trovato col calcolo semplificato b), rispetto a quello esatto?

2) Calcola il valore della quantità $(1+\alpha)^3 - 1$, per $\alpha = 0{,}01$
   a) in modo preciso b) trascurando, nello sviluppo del prodotto notevole, i termini di 2° e di 3° grado.
   Di che percentuale differisce il valore trovato col calcolo semplificato b), rispetto a quello esatto?

3) Le maggiori montagne dei 7 continenti hanno rispettivamente le seguenti altezze h.
   Africa: 5.895 m; Nordamerica: 6.194 m; Sudamerica: 6.962 m; Asia: 8.844 m; Antartide: 4.892 m; Oceania continentale: 2.228 m; Europa (escluso il Caucaso): 4.810 m. Calcola il massimo valore del Δh.

Matematica
e Problemi
della Realtà

I PRODOTTI NOTEVOLI E IL DOPPIO LANCIO DEL TAPPO DI PLASTICA

ESERCIZIO 4)

Se si lancia un tappino di plastica, la probabilità che cada fermandosi con la parte cava verso l'alto è diversa dalla probabilità che la parte cava risulti invece rivolta verso il basso (tali probabilità possono essere valutate annotando le "frequenze relative" su un numero elevato di lanci: se, ad esempio, lanciando il tappo 1000 volte vediamo che si ferma con la parte cava verso l'alto 612 volte, la probabilità che, lanciandolo ancora, si fermi con la parte cava verso l'alto, potrà essere valutata in circa 612/1000 ossia intorno al 61%).

Ma dette p e q queste due probabilità, qualunque esse siano, **si può dimostrare che, lanciandolo per due volte di seguito, è più facile che escano risultati fra loro uguali piuttosto che risultati differenti**!

Il fatto è che, come insegna il Calcolo delle Probabilità:

- se la probabilità di "parte cava verso l'alto" è p, allora la probabilità che "lanciando 2 volte il tappo, per 2 volte si ottenga parte cava verso l'alto" sarà p^2
- e analogamente, se la probabilità di "parte cava verso il basso" è q, allora la probabilità che "lanciando 2 volte il tappo, per 2 volte si ottenga parte cava verso il basso" sarà q^2;
- **la probabilità** quindi **dell'evento "lanciando per 2 volte un tappo, esce o per 2 volte la parte cava verso l'alto oppure per 2 volte la parte cava verso il basso" è p^2+q^2**
- mentre **la probab. che, lanciando il tappo 2 volte, si abbiano esiti diversi, è data da $pq+qp = 2pq$.**

Ora, **è possibile dimostrare che, quando è $p \neq q$, risulta sempre $p^2+q^2 > 2pq$. COME SI FA?**

RISPOSTE: 1) a) 0,004004 b) 0,004; di meno dello 0,1% 2) a) 0,030301 b) 0,03; di meno dell'1%
3) 6616 m 4) La differenza p^2+q^2-2pq equivale a … che è sempre >0 perché …