EQUAZIONI E PROBLEMI

1. ESEMPI DI PROBLEMI A UNA INCOGNITA

❑ PROBLEMA SVOLTO 1

Per prender parte alla "festa del primino" ogni maschio deve pagare un biglietto da 5 euro, ogni femmina un biglietto da 3 euro. Si vendono in totale 90 biglietti, e si osserva che, complessivamente, i maschi hanno pagato 10 euro più delle femmine. Quante ragazze e quanti ragazzi hanno partecipato alla festa?

RISOLUZIONE

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$x = numero\ delle\ \ femmine$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$numero\ dei\ maschi = 90 - x$
$cifra\ complessiva, in\ euro,\ pagata\ dai\ maschi = 5(90 - x)$
$cifra\ complessiva\ in\ euro,\ pagata\ dalle\ \ femmine = 3x$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$5(90 - x) = 3x + 10$ (NOTA 1)
$450 - 5x = 3x + 10$
$-5x - 3x = 10 - 450$ (NOTA 2)
$-8x = -440$
$8x = 440$ (NOTA 3)
$x = \frac{\cancel{440}^{55}}{\cancel{8}}$ (NOTA 4)
da cui: 55 femmine, $90 - 55 = 35$ maschi

♥ Come ribadiremo in seguito, le TRE FASI per la risoluzione di un "problema con la x" sono:

I) porre la x (= decidere cosa indicare con x)
II) esprimere per mezzo di x le varie quantità in gioco
III) impostare l'equazione risolvente

♥ VERIFICA DOPO LA RISOLUZIONE (sempre consigliata!)

Se le femmine sono 55 e i maschi 35, la spesa totale delle femmine è di euro $55 \cdot 3 = 165$ mentre la spesa totale dei maschi è di euro $35 \cdot 5 = 175$

OK, i maschi complessivamente spendono 10 euro più delle femmine!!!

NOTA 1

Questa, che abbiamo scritto, è una "**equazione**".

> **♥ Si dice "EQUAZIONE" un'uguaglianza, contenente un numero sconosciuto, "incognito" (generalmente indicato con x), di fronte alla quale ci si propone di determinare per quali valori di x, ammesso che esistano, l'uguaglianza stessa è verificata.**

Per risolvere un'equazione, prima di tutto si svolgono i calcoli, in modo da eliminare le parentesi e portare ciascuno dei due membri sotto la forma più semplice possibile.
L'obiettivo finale sarà di ottenere, con opportuni passaggi, il valore di x: $x = \ldots$

NOTA 2

Dall'equazione $450 - 5x = 3x + 10$
si passa all'equazione $-5x - 3x = 10 - 450$
con la "REGOLA DEL TRASPORTO":

> **♥ In un'equazione, è possibile trasportare un termine (nel senso di: un addendo di somma algebrica) dall'altra parte del simbolo =, CAMBIANDOLO PERO' DI SEGNO**

Perché mai è possibile ciò? Vediamo.
L'equazione iniziale è $450 - 5x = 3x + 10$
ma noi desideriamo giungere, prima o poi, all'uguaglianza $x = \ldots$
quindi, innanzitutto, vorremmo che tutti i termini contenenti x fossero a primo membro, e tutti i termini "noti" (cioè: conosciuti, non contenenti x) a secondo membro.
Prendiamo ad esempio il termine $3x$: esso sta a secondo membro, ma "non è il posto giusto per lui".
Come toglierlo dal secondo membro?
Beh, toglierlo dal secondo membro significherebbe SOTTRARLO dal secondo membro; d'altra parte, se in un'uguaglianza noi sottraiamo un numero da uno soltanto dei due membri, l'uguaglianza "si rovina", "la bilancia perde il suo equilibrio".
Invece la bilancia resta in equilibrio se il numero che sottraiamo da uno dei due membri, lo andiamo a sottrarre anche dall'altro!

Perciò:

$450-5x=3x+10$

$450-5x-3x=\cancel{3x}+10\cancel{-3x}$

Cos'abbiamo fatto? Abbiamo sottratto dai due membri uno stesso numero, il numero $3x$.
La bilancia, sottraendo lo stesso peso da entrambi i piatti, resta in equilibrio.
Il termine $3x$ è così scomparso dal secondo membro, ma simultaneamente è apparso al primo membro, cambiato però di segno!!!

Ora abbiamo

$450-5x-3x=10$

ma non siamo ancora soddisfatti!
Infatti c'è il termine noto 450, che "ci dà fastidio": vorremmo che fosse a secondo membro!
Facile: sottraiamo 450 da entrambi i membri e avremo:

$\cancel{450}-5x-3x\cancel{-450}=10-450$

Quindi, il termine 450 è scomparso dal primo membro,
ma in compenso eccolo comparire a secondo membro, cambiato però di segno!

Il discorso fatto giustifica dunque la "**regola del trasporto**".
Rileggiamo cosa dice questa regola:

In un'equazione, è possibile trasportare un termine
(nel senso di: un addendo di somma algebrica)
dall'altra parte del simbolo =,
CAMBIANDOLO PERO' DI SEGNO

Allora, ricapitolando, quando siamo passati
dall'equazione $450-5x=3x+10$ all'equazione $-5x-3x=10-450$,
abbiamo applicato, per due volte, la "regola del trasporto".

NOTA 3

In questo passaggio abbiamo applicato la REGOLA che dice:

> ♥ **In un'equazione, è possibile cambiare di segno tutti i termini**
> **(= addendi delle due somme algebriche a primo e a secondo membro)**

Infatti, se due numeri sono uguali, anche i rispettivi opposti saranno uguali !!!

NOTA 4

A partire da $8x=440$ ricaviamo $x=\dfrac{440}{8}$

Questo è perfettamente comprensibile:
se 8 volte un certo numero dà un certo risultato, allora quel numero sarà uguale al risultato, DIVISO 8 (la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione).
Se 8 volte il mio stipendio dà 10000 euro, quant'è il mio stipendio? Ovvio: 10000:8 = 1250 euro.

Oppure, potremmo ragionare così:
noi abbiamo $8x=440$ ma vorremmo avere $x=\ldots$

Insomma, quel moltiplicatore 8, a sinistra di x, ci dà fastidio! Vorremmo sbarazzarcene.
Possiamo ottenere il nostro scopo, mantenendo la bilancia in equilibrio,
se dividiamo per 8 sia il primo che il secondo membro: $\dfrac{\cancel{8}x}{\cancel{8}}=\dfrac{440}{8}$.

Di qui la REGOLA:

> ♥ **"Ciò che moltiplica da una parte del simbolo =, divide dall'altra;**
> **ciò che divide da una parte, moltiplica dall'altra".**

Ad esempio, un "moltiplicato 8" a sinistra dell'=, diventa un "fratto 8" a destra dell'=.

Questa potrebbe essere chiamata, volendo,
la "**REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE-DIVISIONE**"
(mentre la precedente era, più precisamente, la "**regola del trasporto per la somma algebrica**").

Prima di passare a considerare altri problemi,
dedichiamo una pagina alla **RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI**,
prendendo in esame un paio di esempi.

$2(3x-1)+4x=9(2x+1)-5$ *Svolgo i calcoli, per eliminare le parentesi*

$\underline{6x}-2\ \underline{+4x}=18x\underline{\underline{+9}}\ \underline{\underline{-5}}$ *Sottolineo e riduco i termini simili a 1° e 2° membro*

$10x-2=18x+4$ *Siccome il mio obiettivo finale è di ottenere $x=\ldots$, porto tutti i termini con x a 1° membro e tutti i termini senza x (= termini "noti") a 2° membro. Naturalmente, se un termine "salta" dall'altra parte del simbolo =, deve cambiare di segno*

$10x-18x=4+2$ *Riduco i termini simili*

$-8x=6$ ♥ *Il coefficiente di x è negativo: non è obbligatorio, ma è conveniente cambiare i segni di entrambi i membri*

$8x=-6$ *Divido per il coefficiente di x:* $\dfrac{\cancel{8}x}{\cancel{8}}=\dfrac{-6}{8}$

$$x=\frac{-\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,4}}=-\frac{3}{4}$$

Se voglio, faccio ora la verifica sostituendo il valore trovato, $x=-\frac{3}{4}$, nell'equazione iniziale $2(3x-1)+4x=9(2x+1)-5$ per vedere se in effetti così facendo si ottiene un'uguaglianza vera.

$$2\left[3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-1\right]+\cancel{4}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{4}}\right)=9\left[\cancel{2}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{4}_{\,2}}\right)+1\right]-5$$

$$2\left[-\frac{9}{4}-1\right]-3=9\left[-\frac{3}{2}+1\right]-5;\quad \cancel{2}\cdot\frac{-9-4}{\cancel{4}_{\,2}}-3=9\cdot\frac{-3+2}{2}-5;\quad -\frac{13}{2}-3=9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-5;$$

$$-\frac{13}{2}-3=-\frac{9}{2}-5;\quad \frac{-13-6}{2}=\frac{-9-10}{2};\quad -\frac{19}{2}=-\frac{19}{2}\quad \text{OK!!!}$$

$\dfrac{5x+1}{3}-\dfrac{x+5}{6}=4$ *Faccio il denominatore comune, che dev'essere lo stesso sia a 1° che a 2° membro*

$\dfrac{2(5x+1)-(x+5)}{\cancel{6}}=\dfrac{24}{\cancel{6}}$ *Mando via i due denominatori uguali (è come moltiplicare per lo stesso numero, il 6, entrambi i membri)*

$\underline{10x}+\underline{\underline{2}}\underline{-x}\underline{\underline{-5}}=24$ *Svolgo i calcoli, riduco i termini simili*

$9x-3=24$ *Trasporto (tutti i termini con x al 1° membro, tutti gli altri al 2°) e riduco*

$9x=27$ *Divido per il coefficiente di x:* $\dfrac{\cancel{9}x}{\cancel{9}}=\dfrac{27}{9}$

$x=\dfrac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{9}}=3$ *Ho finito: se voglio, faccio la verifica sostituendo nell'equazione iniziale*

♥ Quando ci sono dei denominatori, conviene innanzitutto liberarsene.
IN GENERALE, NON È CONVENIENTE trasportare termini o ridurre termini simili mentre ci sono ancora i denominatori!
Altro esempio:

$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x+2$$

$$\frac{4x-6}{\cancel{12}}=\frac{3x+24}{\cancel{12}}$$

$$4x-3x=24+6;\quad x=30$$

ESERCIZI

Risolvi queste equazioni, commentando ogni passaggio e facendo la verifica ⇨

1) $7x-5=3x-1$
2) $5x+1=6x-7$
3) $2(x-1)=5(x+2)$
4) $7x+1=3(x+1)$
5) $3(x+4)+8x=2(x+6)$
6) $x=10x+15$
7) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}x=\dfrac{3}{10}x+\dfrac{1}{3}$
8) $\dfrac{x}{4}+1=2\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$

SO-LU-ZIO-NI

1) $x=1$ 2) $x=8$ 3) $x=-4$ 4) $x=\frac{1}{2}$ 5) $x=0$ 6) $x=-\frac{5}{3}$ 7) $x=-\frac{8}{3}$ 8) $x=4$

❑ PROBLEMA SVOLTO 2

La mamma di Andrea è di 3 anni più giovane rispetto al papà.
La differenza fra i quadrati delle due età è 243. Quanti anni hanno i genitori di Andrea?

RISOLUZIONE

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$$x = \textit{età del papà}$$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$$\textit{età della mamma} = x-3$$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$x^2-(x-3)^2=243$$
$$x^2-\left(x^2-6x+9\right)=243$$
$$\cancel{x^2}\cancel{-x^2}+6x-9=243$$
$$6x=243+9; \quad 6x=252; \quad x=\frac{\cancel{252}^{\,42}}{\cancel{6}}$$

Essendo dunque l'età del *padre* 42 anni,
l'età della *mamma* sarà 42 – 3 = 39 anni.

VERIFICA DOPO LA RISOLUZIONE:

Controlliamo se la differenza dei quadrati delle due età trovate vale proprio 243.

$$42^2-39^2=1764-1521=243, \quad \text{OK!!!}$$

OSSERVAZIONE

Evidentemente, avrei anche potuto scegliere di porre $x = \textit{età della mamma}$;
avrei allora avuto $\textit{età del papà} = x+3$
e l'equazione risolvente sarebbe stata $(x+3)^2-x^2=243$
con la soluzione $x=39$

❑ PROBLEMA SVOLTO 3

Trovare due interi consecutivi, tali che
la differenza fra il loro prodotto e il quadrato del più piccolo sia uguale al numero più grande.

RISOLUZIONE

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$$x = \textit{numero più piccolo}$$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$$\textit{numero più grande} = x+1$$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$x(x+1)-x^2=x+1$$
$$\cancel{x^2}+x\cancel{-x^2}=x+1$$
$$x-x=1$$

$0=1$ L'EQUAZIONE E' QUINDI IMPOSSIBILE, PRIVA DI SOLUZIONI!

Infatti
$x-x=0$ *o anche* $x-x=0\cdot x$, *e l'uguaglianza* $0\cdot x=1$ *non è verificata da nessun valore di* x

Risposta:

Non esiste *nessuna coppia di interi consecutivi* che soddisfi alla proprietà richiesta.

❑ PROBLEMA SVOLTO 4

Pierino ha calcolato che con la sua paghetta settimanale potrebbe comprare
- **8 crostate (e in questo caso la spenderebbe tutta),**
- **o in alternativa 13 gelati (e in questo caso avanzerebbe un euro).**

Trovare l'ammontare in euro della paghetta di Pierino,
sapendo che un gelato costa 2 euro in meno rispetto a una crostata.

CONFRONTIAMO, PER QUESTO PROBLEMA, DIVERSE ALTERNATIVE DI RISOLUZIONE.

RISOLUZIONE 1

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$x = \textit{costo, in euro, di una crostata}$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$\textit{costo, in euro, di un gelato} = x-2$
$\textit{ammontare, in euro, della paghetta di Pierino} = 8x \ \textit{oppure} \ 13(x-2)+1$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$8x = 13(x-2)+1$$
$$8x = 13x-26+1$$
$$8x-13x = -25$$
$$-5x = -25$$
$$5x = 25$$
$$x = 5$$

Una crostata costa 5 *euro, un gelato* $5-2=3$ *euro, la paghetta di Pierino è di* $8\cdot 5 = 40$ *euro*

RISOLUZIONE 2

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

$x = \textit{ammontare, in euro, della paghetta di Pierino}$

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$\textit{costo, in euro, di una crostata} = \frac{x}{8} = \frac{1}{8}x$

$\textit{costo, in euro, di un gelato} = \frac{1}{8}x-2$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$13\left(\frac{1}{8}x-2\right)+1 = x\,; \qquad \frac{13}{8}x-26+1 = x\,; \qquad \frac{13}{8}x-25 = x$$

che posso affrontare in vari modi :

così…

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13}{8}x-x = 25$$
$$\frac{5}{8}x = 25$$
$$x = \frac{25}{\frac{5}{8}} = \cancel{25}^{5}\cdot\frac{8}{\cancel{5}} = 40$$

Porto tutti i termini contenenti x a primo membro, riduco i termini simili, e infine divido per il coefficiente di x, che è, in questo caso, la frazione 5/8

… oppure così …

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13}{8}x-x = 25$$
$$\frac{5}{8}x = 25$$
$$\frac{\cancel{8}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{8}}x = \cancel{25}^{5}\cdot\frac{8}{\cancel{5}}$$
$$x = 40$$

Come prima; questa volta, ho scelto di effettuare il passaggio finale sbarazzandomi del coeff. di x (5/8) tramite moltiplicazione per il reciproco (che è 8/5)

… o in quest'altra maniera, forse la più comoda:

$$\frac{13}{8}x-25 = x$$
$$\frac{13x-200}{\cancel{8}} = \frac{8x}{\cancel{8}}$$
$$13x-8x = 200$$
$$5x = 200$$
$$x = 40$$

Qui ho scelto di eliminare innanzitutto il denominatore, facendo il denominatore comune uguale sia a 1° che a 2° membro poi mandando via questo denominatore comune tramite moltiplicazione per 8 di entrambi i membri

RISOLUZIONE 3

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

x = ammontare, in euro, della paghetta di Pierino

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

costo, in euro, di una crostata $= \frac{x}{8} = \frac{1}{8}x$

costo, in euro, di un gelato $= \frac{x-1}{13}$ (NOTA 1)

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$\frac{x-1}{13} = \frac{x}{8} - 2$$
$$\frac{8x-8}{\cancel{104}} = \frac{13x-208}{\cancel{104}}$$
$$8x - 13x = -208 + 8$$
$$-5x = -200$$
$$5x = 200$$
$$x = 40 \text{ (OSSERVAZIONE 1)}$$

NOTA 1

Se con la paghetta compro 13 gelati,
mi rimane 1 euro d'avanzo;
quindi, se prendo la paghetta x
e metto da parte 1 euro,
con la cifra restante, che sarà $x-1$,
potrò comprare esattamente 13 gelati.

Il costo di un singolo gelato è perciò $\frac{x-1}{13}$.

Potevo anche procedere mediante
l'inversione di una formuletta:

$p = 13g + 1$ *(p paghetta, g gelato)*
$13g + 1 = p$ *(scambiando i due membri)*
$13g = p - 1$ *(isolando il termine con g)*
$g = \frac{p-1}{13}$

OSSERVAZIONE 1

Qui abbiamo forse faticato un po' di più;
in effetti, la risoluzione 2)
è preferibile rispetto alla 3), perché
nella 2) l'informazione più complicata
viene utilizzata soltanto alla fine,
per impostare l'equazione risolvente,
e non prima (vedi il paragrafo 2,
"Problemi a una incognita:
indicazioni generali")

ESERCIZI (equazioni con denominatori) ⇨

1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{4}x$ 2) $\frac{x+1}{4} + \frac{x-2}{3} = \frac{1}{6}$

3) $1 - \frac{x+3}{4} = \frac{1}{2}x$ 4) $\frac{2x-1}{3} = \frac{1}{2}(x-2)$

Sol.: 1) $x = 8/5$ 2) $x = 1$ 3) $x = 1/3$ 4) $x = -4$

❑ PROBLEMA SVOLTO 5

Trovare tre numeri, sapendo che il primo è i 2/3 del secondo,
il secondo supera di un'unità la metà del terzo,
e la media dei tre numeri è 36.

RISOLUZIONE

$\boxed{\text{Pongo la } x}$:

x = 3° *numero* (OSSERVAZIONE 2)

$\boxed{\text{Esprimo le varie quantità in gioco per mezzo di } x}$:

$$2° \; numero = \frac{1}{2}x + 1$$
$$1° \; numero = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{Imposto l'equazione risolvente}}$:

$$\frac{x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{3} = 36 \quad \text{(NOTA 2)}$$
$$x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 108 \quad \text{(NOTA 3)}$$
$$\frac{6x + 3x + 6 + 2x + 4}{\cancel{6}} = \frac{648}{\cancel{6}}$$
$$11x + 10 = 648 \; \ldots \; x = 58$$

I tre numeri cercati sono :

$\boxed{3° \; n° = 58}$; $\boxed{2° \; n° =} \frac{1}{2} \cdot 58 + 1 = \boxed{30}$; $\boxed{1° \; n° =} \frac{2}{3} \cdot 30 = \boxed{20}$

OSSERVAZIONE 2

E' conveniente porre come x
proprio il 3° numero,
perché con questa scelta è più facile
esprimere le altre quantità in gioco,
ossia i due numeri rimanenti,
per mezzo di x
(vedi il paragrafo 2,
"Problemi a una incognita: indicazioni generali")

NOTA 2

Avremmo anche potuto evitare
le fastidiose linee di frazione sovrapposte:
bastava moltiplicare per 1/3
anziché dividere per 3,
bastava cioè scrivere

$$\left(x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 36$$

NOTA 3

Per mandar via la linea di frazione principale
(intendo, per mandar via il lungo "fratto 3")
abbiamo moltiplicato per 3
sia il primo che il secondo membro