

## 6. I PRINCIPI DI EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI

Ricordiamo che due equazioni si dicono “equivalenti” fra loro quando hanno le stesse soluzioni; quando, cioè, ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, E VICEVERSA.

Ad esempio, le due equazioni  $2(x-4) = x$  e  $x+1 = 9$  sono fra loro equivalenti, perché entrambe hanno come unica soluzione  $x = 8$ ; due equazioni che siano entrambe impossibili sono equivalenti fra loro; le due equazioni  $(x-2)(x-3) = 0$  e  $x^2 + 6 = 5x$  sono equivalenti, perché per entrambe l'insieme delle soluzioni è  $S = \{2, 3\}$ . Invece le equazioni  $x-2 = 0$  e  $x^2 = 4$  NON sono equivalenti, in quanto l'insieme delle soluzioni della prima è  $S_1 = \{2\}$  mentre l'insieme delle soluzioni della seconda è  $S_2 = \{-2, +2\}$ .

### 1° Principio di Equivalenza delle Equazioni

**Data un'equazione  $A(x) = B(x)$ , aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri uno stesso numero, oppure una stessa espressione contenente  $x$ , e che esiste per qualsiasi valore di  $x$ , si ottiene con certezza un'equazione equivalente a quella iniziale.**

Dimostriamolo.

Partiamo dall'equazione

$$(1) \quad A(x) = B(x),$$

e aggiungiamo ad entrambi i membri una stessa espressione  $C(x)$  che esiste per qualsiasi valore di  $x$ .

Vogliamo dimostrare che la nuova equazione

$$(2) \quad A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$$

è equivalente alla (1), ossia ha le stesse soluzioni della (1).

Supponiamo dunque che un dato numero  $\alpha$  sia soluzione della (1).

Allora quel numero  $\alpha$  sarà tale che, sostituendolo al posto di  $x$  nella (1), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza

$$A(\alpha) = B(\alpha);$$

quindi sarà pure vera l'uguaglianza

$$A(\alpha) + C(\alpha) = B(\alpha) + C(\alpha) \quad (\text{osserviamo che l'ipotesi ci garantisce l'esistenza del numero } C(\alpha))$$

perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà vera anche qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima aggiungendo ad entrambi i suoi membri uno stesso numero.

Ma se è vera l'uguaglianza

$$A(\alpha) + C(\alpha) = B(\alpha) + C(\alpha)$$

ciò significa che il numero  $\alpha$  è soluzione della (2).

Con ciò abbiamo provato che ogni soluzione della (1) è soluzione pure della (2).

Vediamo se vale anche il viceversa.

Supponiamo che un dato numero  $\alpha$  sia soluzione della (2).

Allora quel numero  $\alpha$  sarà tale che, sostituendolo al posto di  $x$  nella (2), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza

$$A(\alpha) + C(\alpha) = B(\alpha) + C(\alpha);$$

quindi sarà pure vera l'uguaglianza

$$A(\alpha) = B(\alpha),$$

perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà anche vera qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima sottraendo da entrambi i suoi membri uno stesso numero ( $C(\alpha)$  nel nostro caso).

Ma se è vera l'uguaglianza

$$A(\alpha) = B(\alpha)$$

ciò significa che il numero  $\alpha$  è soluzione della (1).

Quanto abbiamo visto prova che ogni soluzione della (2) è soluzione pure della (1).

E allora, ricapitolando:

ogni soluzione della (1) è pure soluzione della (2); ogni soluzione della (2) è pure soluzione della (1);  
... le due equazioni (1) e (2) hanno le stesse soluzioni, sono equivalenti!

Evidentemente i ragionamenti di cui sopra valgono anche nel caso in cui, anziché aggiungere ai due membri una stessa espressione  $C(x)$ , noi aggiungiamo ad essi uno stesso numero  $k$ .

Per quanto riguarda poi la possibilità di *sottrarre* (anziché aggiungere) un numero o un'espressione, la dimostrazione è del tutto analoga e la lasciamo al lettore.

Dal 1° Principio di Equivalenza delle Equazioni dipendono le seguenti REGOLE di cui ci siamo già occupati:

- se a 1° e a 2° membro ci sono due termini (=addendi di somma algebrica) uguali, li possiamo mandar via
- possiamo trasportare un termine dall'altra parte del simbolo “=”, cambiandolo però di segno (“REGOLA DEL TRASPORTO PER LA SOMMA ALGEBRICA”)

## 2° Principio di Equivalenza delle Equazioni

**Data un'equazione  $A(x) = B(x)$ , moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero diverso da 0, oppure per una stessa espressione contenente  $x$ , a patto però che questa espressione esista per qualsiasi valore di  $x$  e non si annulli per nessun valore di  $x$ , si ottiene certamente un'equazione equivalente a quella di partenza.**

Partiamo dall'equazione (1)  $A(x) = B(x)$ , e moltiplichiamone ambo i membri per un'espressione  $C(x)$ , che esista per qualsiasi valore di  $x$ :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists C(x)$  e che non si annulli mai:  $\forall x \in \mathbb{R}, C(x) \neq 0$ .

Vogliamo dimostrare che la nuova equazione (2)  $A(x) \cdot C(x) = B(x) \cdot C(x)$  è equivalente alla (1), ossia ha le stesse soluzioni della (1).

Supponiamo che un dato numero  $\alpha$  sia soluzione della (1). Allora quel numero  $\alpha$  sarà tale che, sostituendolo al posto di  $x$  nella (1), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza  $A(\alpha) = B(\alpha)$ ; quindi sarà pure vera l'uguaglianza  $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$ , perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà vera anche qualsiasi uguaglianza ottenibile da essa moltiplicandone entrambi i membri per uno stesso numero. Ma se è vera l'uguaglianza  $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$ , ciò significa che il numero  $\alpha$  è soluzione della (2).

Con ciò abbiamo provato che ogni soluzione della (1) è soluzione pure della (2).

Vediamo se vale anche il viceversa. Supponiamo che un dato numero  $\alpha$  sia soluzione della (2).

Allora quel numero  $\alpha$  sarà tale che, sostituendolo al posto di  $x$  nella (2), si ottenga un'uguaglianza vera; sarà dunque vera l'uguaglianza  $A(\alpha) \cdot C(\alpha) = B(\alpha) \cdot C(\alpha)$ ; quindi sarà pure vera l'uguaglianza  $A(\alpha) = B(\alpha)$ , perché, se un'uguaglianza è vera, ovviamente sarà anche vera qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla prima dividendone entrambi i membri per uno stesso numero diverso da 0 (qui interviene l'ipotesi  $C(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ). Ma se è vera l'uguaglianza  $A(\alpha) = B(\alpha)$ , ciò significa che il numero  $\alpha$  è soluzione della (1).

Quanto abbiamo visto prova che ogni soluzione della (2) è soluzione pure della (1).

Allora, ricapitolando: ogni soluzione della (1) è soluzione della (2); vale anche il viceversa; ... pertanto le due equazioni (1) e (2) hanno le stesse soluzioni, sono equivalenti.

Evidentemente i ragionamenti di cui sopra valgono anche nel caso in cui, anziché moltiplicare i due membri per una stessa *espressione*  $C(x)$  che non si annulla mai, noi li moltiplichiamo per uno stesso *numero*  $k \neq 0$ .

Per quanto riguarda poi la possibilità di *dividere* (anziché di moltiplicare) per un numero non nullo o per un'espressione sempre esistente e mai nulla, la dimostrazione è del tutto analoga e la lasciamo al lettore.

Dal 2° Principio di Equivalenza delle Equazioni dipendono le seguenti REGOLE di cui ci siamo già occupati:

- se tanto il 1° che il 2° membro sono due frazioni con lo stesso denominatore, possiamo mandar via i due denominatori uguali
- possiamo semplificare tutti i termini per uno stesso numero
- possiamo cambiare di segno tutti i termini (=addendi delle due somme algebriche a 1° e a 2° membro)
- “ciò che moltiplica da una parte dell' “=”, divide dall'altra; ciò che divide da una parte, moltiplica dall'altra” (“REGOLA DEL TRASPORTO PER LA MOLTIPLICAZIONE /DIVISIONE”)

**E' importante tener presente che si può essere certi di pervenire a un'equazione equivalente a quella iniziale solo se l'espressione  $C(x)$  che entra in gioco**

**♪ esiste sempre, nel caso del 1° Principio;**

**♫ esiste sempre e non si annulla mai, nel caso del 2° Principio.**

- Consideriamo, come controesempio, la coppia di equazioni  $x+1=3$  e  $x+1+\frac{1}{x-2}=3+\frac{1}{x-2}$ .

Qui la seconda è ottenibile dalla prima addizionando una stessa espressione ad entrambi i membri; ma si osserva che l'espressione stessa non rispetta la condizione di esistere sempre, per qualsiasi  $x$  (in effetti, per via del denominatore, non esiste con  $x=2$ ).

NON siamo quindi certi che le due equazioni siano equivalenti; potrebbero esserlo, ma anche non esserlo. E in effetti non lo sono, perché, mentre la prima ha come soluzione  $x=2$ , la seconda è impossibile.

- Un altro controesempio. Le due equazioni  $2x=x+1$  e  $2x(x-3)=(x+1)(x-3)$  NON sono equivalenti (la prima ha come unica soluzione  $x=1$ , la seconda ha una soluzione in più, essendo verificata sia per  $x=1$ , che per  $x=3$ ). Eppure la 2ª equazione è ottenibile dalla 1ª tramite moltiplicazione per  $(x-3)$  ... Però l'espressione  $(x-3)$  si può annullare, quindi non sono rispettati i requisiti del 2° Principio.

**Terminiamo col ricordare (l'avevamo già osservato a pag. 151) che ELEVANDO AL QUADRATO i 2 membri di una equazione NON si è certi di pervenire ad un'equazione equivalente a quella iniziale; infatti l'equazione così ottenuta conserva, sì, tutte le soluzioni dell'equazione data, ma può accadere che ne acquisti in più delle altre “estrane” all'equazione di partenza, perciò non accettabili.**