

PROPORZIONI E PROPORZIONALITA'

1. PROPORZIONI

Si dice "**proporzione**" un'uguaglianza fra due rapporti (= quozienti).

Esempio

$$12 : 16 = 15 : 20$$

Questa proporzione è corretta, perché effettivamente i due rapporti (= quozienti)

12:16 e 15:20

sono uguali fra loro (valgono entrambi $\frac{3}{4}$, o, se si preferisce: 0,75).

Di solito si legge "**12 sta a 16 come 15 sta a 20**",

proprio per evidenziare il fatto che si va a confrontare il "peso di un numero rispetto all'altro":

12, nei confronti di 16, è $\frac{3}{4}$ e quindi è proprio come 15 nei confronti di 20.

ESERCIZI (risposte in fondo a questa pagina)

- Quanto deve valere x se si vuole che la proporzione $24 : 12 = x : 11$ sia corretta?
- Quanto deve valere y se si vuole che la proporzione $5 : 15 = y : 18$ sia corretta?
- Quanto deve valere z se si vuole che la proporzione $6 : 4 = 30 : z$ sia corretta?

Un po' di **terminologia**.

In una proporzione,

- i due dividendi (cioè: il 1° e il 3° termine) si dicono "**antecedenti**";
- i due divisori (cioè: il 2° e il 4° termine) si dicono "**consequenti**";

antecedenti
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $12 : 16 = 15 : 20$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 conseguenti

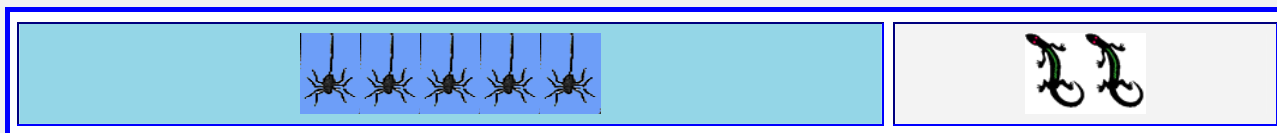
- il 1° e il 4° termine si dicono "**estremi**";
- il 2° e il 3°, "**medi**".

estremi
 $\nearrow \quad \nwarrow$
 $12 : 16 = 15 : 20$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 medi

Dal sito <http://math.rice.edu/~lanius/Lessons/index.html> di Cynthia Lanis (USA) :

All About Ratios (*ratio* = rapporto, sia in Latino che in Inglese!)

- If you have spiders to lizards at the ratio below and have 12 lizards, how many spiders do you have?



- If you have pizza slices to girls at the ratio below, and if you have 33 girls, how many slices of pizza do you have?



Risposte agli esercizi di questa pagina:

- Il quoziente $24:12$ vale 2, quindi anche il quoziente $x:11$ dovrà valere 2, e ciò avviene a condizione che x sia uguale a 22.
Anche: così come 24 è il doppio di 12, altrettanto x dovrà essere il doppio di 11 da cui $x = 22$.
- Così come 5 è la terza parte di 15, anche y dovrà essere la terza parte di 18. Perciò $y = 6$.
- $6:4 = 1,5$ ossia il 6 è 1 volta e mezza il 4. Il 30 è una volta e mezza ... che cosa? 20, evidentemente!
Anche ragionando "da destra a sinistra":
 z , rispetto al 30, dovrà avere lo stesso "peso" che ha il 4 rispetto al 6.
Ma 4 è $\frac{2}{3}$ di 6, cioè $\frac{2}{3}$ di 6, e allora z dovrà essere $\frac{2}{3}$ di 30, cioè 20.

PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;

E, **VICEVERSA** (importante!!!),

se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due,
allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione,
a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di un medesimo prodotto.

Brevemente:

se a, b, c, d sono quattro numeri non nulli,
vale la **doppia implicazione**

$$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$$

Dimostrazione

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$$

♥ Il simbolo $\Leftrightarrow$ è quello di
“biimplicazione logica”:
“se ... allora ... e viceversa”,
per qualsiasi valore
delle lettere coinvolte

♥ E' davvero di grande importanza tener presente che
questa proprietà consta di DUE enunciati:
un enunciato **diretto**, e il rispettivo **inverso** (*).

Essa fornisce perciò una condizione
NECESSARIA E SUFFICIENTE
affinché quattro numeri non nulli, presi in un dato ordine,
formino una proporzione valida.

(*) Per verificare se una proporzione è corretta,
anziché calcolare i due quozienti per vedere se coincidono,
si può andare a vedere se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi:
così facendo si applica, appunto, la "Proprietà Fondamentale"
... precisamente - nota bene! - nel suo "aspetto **INVERSO**"!

La Proprietà Fondamentale delle proporzioni ha importanti **CONSEGUENZE**.

Ad esempio, supponiamo che in una proporzione siano noti i primi tre termini ma non il quarto;
allora si può scrivere

$$a : b = c : x; \quad ax = bc; \quad x = \frac{bc}{a}.$$

E in generale, è facile vedere che:

se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;
se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto

Esempio:

$$25 : x = 20 : 12 \quad x = \frac{25 \cdot 12}{20} = 15$$

Se più termini di una proporzione sono espressi in funzione di una stessa incognita x ,
la proporzione si può interpretare come un'equazione che permetterà di trovare il valore di x .

Applicare la Proprietà Fondamentale è in questo caso un modo veloce e comodo
per liberarsi dai denominatori.

Esempio:

$$\begin{aligned} (x+4) : 10 &= (2x+1) : 15 \\ (x+4) \cdot 15 &= 10 \cdot (2x+1) \\ 15x+60 &= 20x+10 \\ -5x &= -50 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

In alternativa, si poteva trasformare
in una “classica” equazione coi denominatori:

$$\begin{aligned} (x+4) : 10 &= (2x+1) : 15 \\ \frac{x+4}{10} &= \frac{2x+1}{15}; \quad \frac{3(x+4)}{30} = \frac{2(2x+1)}{30} \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Le proporzioni godono di diverse altre **proprietà**, che si possono facilmente dimostrare con semplici passaggi algebrici, utilizzando eventualmente la "Proprietà Fondamentale".

Queste proprietà permettono, a partire da una proporzione fissata $\boxed{a : b = c : d}$, di ricavarne altre, che saranno corrette anch'esse *se e solo se* lo è quella di partenza.

Ecco qui di seguito un elenco delle **PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI**.

$b : a = d : c$ (invertire)

$a : c = b : d$ (permutare i medi)

$d : b = c : a$ (permutare gli estremi)

$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$
 $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$ (comporre e scomporre) *In una proporzione, la somma del 1° e del 2° termine sta al 1° (o al 2°) come la somma del 3° e del 4° sta al 3° (o al 4°). Idem per la differenza.*

$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$
 $(a \pm c) : (b \pm d) = c : d$ (comporre e scomporre applicato agli antecedenti e ai conseguenti) *In una proporzione, la somma (o la differenza) degli antecedenti sta alla somma (o alla differenza) dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al proprio conseguente.*

ESERCIZIO: parti da una proporzione corretta di tua invenzione e controlla che le varie proporzioni ottenibili da quella applicando le varie proprietà di cui sopra, sono ancora corrette.

❑ **Dimostriamo**, ad esempio, la proprietà del **permutare i medi**:

$$a : b = c : d \xrightarrow{\text{(NOTA)}} bc = ad \xrightarrow{\text{(NOTA)}} a : c = b : d \quad \text{NOTA - Proprietà Fondamentale}$$

❑ Come ulteriore esempio, **dimostriamo** una delle proprietà denominate "del **comporre**":

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow (a+b) : b = (c+d) : d$$

Alle proprietà sopra elencate si può aggiungere la seguente, relativa alle "catene di rapporti uguali":
"data una CATENA DI RAPPORTI UGUALI, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente".

Es.: dalla catena $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ si possono ricavare le 3 proporzioni $(14+6+10) : (7+3+5) = \begin{cases} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{cases}$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90 e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$$x : 4 = y : 11 = z : 3 \quad (x+y+z) : (4+11+3) = x : 4 \quad 90 : 18 = x : 4 \quad x = \frac{90 \cdot 4}{18} = 20 \quad \dots \text{e analogamente per } y, z$$

Il quarto termine di una proporzione è detto "QUARTO PROPORZIONALE dopo i primi tre termini".

Ad esempio, nella proporzione $8 : 6 = 12 : 9$ abbiamo che 9 è il quarto proporzionale dopo 8, 6, 12.

❑ *Trovare il quarto proporzionale dopo 24, 6, 8*

$$\boxed{24 : 6 = 8 : x} \quad \text{da cui: } x = \frac{6 \cdot 8}{24} = 2 \quad \begin{array}{l} \text{(anche molto più semplicemente:} \\ \text{così come 24 è il quadruplo di 6,} \\ \text{8 è il quadruplo di cosa? Di 2, è ovvio!)} \end{array}$$

Una proporzione in cui i due medi sono uguali si dice "PROPORZIONE CONTINUA".

Ad esempio, $9 : 6 = 6 : 4$ è una proporzione continua.

In una proporzione continua, ciascuno dei due medi uguali si dice "MEDIO PROPORZIONALE fra il 1° e il 4° termine".

Ad esempio, in $9 : 6 = 6 : 4$, il 6 è medio proporzionale fra 9 e 4.

❑ *Trovare il medio proporzionale fra 2 e 32*

$$\boxed{2 : x = x : 32} \quad x^2 = 2 \cdot 32; \quad x^2 = 64; \quad x = 8 \quad (\text{oppure } x = \pm 8, \text{ a seconda del contesto})$$

ESERCIZI

- 1) Verifica che le seguenti proporzioni sono tutte corrette, controllando che in ciascuna il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi
 a) $12:16=15:20$ b) $12:6=6:3$ c) $40:12=100:30$ d) $1,2:2,16=1,5:2,7$
- 2) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, pensando direttamente all'uguaglianza dei due rapporti e quindi *senza applicare le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"
 a) $6:3=x:5$ b) $6:3=5:x$ c) $15:3=35:x$ d) $15:3=x:4$
 e) $1:2=2:x$ f) $x:10=4:8$ g) $3:4=x:28$ h) $2:3=x:10$
 i) $4:3=x:12$ j) $x:4=6:30$ k) $40:50=x:2$ l) $18:x=30:40$
 m) $7:y=6:3$ n) $24:8=z:11,25$ o) $t:2,6=12:8$ p) $0,05:5=x:0,2$
- 3) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, *applicando le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"
 a) $12:20=18:x$ b) $10:25=x:10$ c) $x:3=4:5$ d) $15:x=35:30$
 e) $12:5=x:8$ f) $x:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ g) $x:2,4=3,2:5$ h) $0,8:0,2=0,1:x$
- 4) Le seguenti proporzioni contengono più volte un'incognita. Determina il valore di questa.
 a) $18:(x+4)=15:x$ b) $(x+2):14=(x+3):16$ c) $x:(x+1)=(x+2):(x+7)$
 d) $h:(h-2)=(h-3):h$ e) $(w+1,2):4=(w-1,2):3$ f) $a:(2a+3)=5:10$
- 5) Determina il *quarto proporzionale* dopo:
 a) 4, 8 e 10 b) 5, 15 e 15 c) 40, 25 e 32 d) 3, 4 e 5
 e) 3; 3,3; 4 f) 2,5; 3,6; 4,7 g) $3^7, 3^{11}, 3^{10}$ h) $5 \cdot 10^{12}, 3 \cdot 10^{13}, 2 \cdot 10^8$
- 6) Determina il *medio proporzionale* (positivo) fra:
 a) 3 e 48 b) 24 e 6 c) 2 e 3 d) 2,5 e 6,4
 e) 3^7 e 3^{11} f) 3,3 e $3\bar{3}$ g) 1 e 5^6 h) 100 e 1000
- 7) **Dividere un numero in parti proporzionali a due numeri dati**
 Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri x, y tali che
 I) $x+y=30$
 II) $x:5=y:7$.
 Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti", si ottiene: $\frac{(x+y)}{30}:(5+7)=\frac{x}{y}:\frac{5}{7}$ da cui: $x=12,5; y=17,5$
 In generale, comunque, per dividere un numero c in due parti proporzionali ai due numeri a e b , basta dividere c per la somma $a+b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per a poi per b .
 Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:
 a) 30; 1 e 4 b) 30; 2 e 3 c) 100; 2 e 3 d) 1; 9 e 11
 e) 0,07; 5 e 9 f) 30; 5 e 2 g) 72; 3 e 5 h) 72; 2 e 3
- 8) Pierino, alla richiesta di determinare x nella proporzione $x:(x-4)=20:15$, scrive: $x=\frac{(x-4) \cdot 20}{15}$, ma non è molto convinto di questo procedimento. Cosa gli consiglieresti?

RISULTATI

- 2a) 10 2b) 2,5 2c) 7 2d) 20 2e) 4 2f) 5 2g) 21 2h) 20/3
 2i) 16 2j) 4/5 2k) 8/5 2l) 24 2m) 3,5 2n) 33,75 2o) 3,9 2p) 0,002
 3a) 30 3b) 4 3c) 12/5 3d) 90/7 3e) $96/5=19,2$ 3f) 5/8 3g) 1,536 3h) 0,025
 4a) 20 4b) 5 4c) 1/2 4d) 6/5 4e) 8,4 4f) impossibile
 5a) 20 5b) 45 5c) 20 5d) 20/3 5e) 4,4 5f) 6,768 5g) 3^{14} 5h) $1,2 \cdot 10^9$
 6a) 12 6b) 12 6c) $\sqrt{6} \approx 2,45$ 6d) 4 6e) 3^9 6f) $\sqrt{11} \approx 3,317$ 6g) 5^3 6h) $\sqrt{100000} \approx 316$
 7a) 6 e 24 7b) 12 e 18 7c) 40 e 60 7d) 0,45 e 0,55 7e) 0,025 e 0,045 7f) $150/7 \approx 21,4$ e $60/7 \approx 8,6$
 7g) 27 e 45 7h) 28,8 e 43,2 8) Di fare *prodotto dei medi = prodotto degli estremi* poi risolvere l'equazione