

2. PROPORZIONALITA' DIRETTA E INVERSA

a) PROPORZIONALITA' DIRETTA

“Se le mie ore di lavoro sono il doppio, anche il guadagno è il doppio”.

Così riflette questa paziente e volenterosa signora immigrata, che viene chiamata da famiglie italiane per fare qualche servizio di pulizia nelle case.

- 8 euro per 1 ora di pulizia;
- 16 euro per 2 ore, dunque,
- 24 euro per 3 ore,
- 32 euro per 4 ore,
- ecc.

Se raddoppiano le ore lavorate, raddoppia anche il guadagno;
se triplicano le ore lavorate, triplica il guadagno,
... ecc.

Vale la formula $\boxed{\text{euro} = 8 \cdot \text{ore}}$ da cui, ad esempio,

- se $\text{ore} = 5$, si avrà $\text{euro} = 8 \cdot 5 = 40$;
- se $\text{ore} = 5 \cdot 2 = 10$ (il doppio di prima),
sarà $\text{euro} = 8 \cdot (5 \cdot 2) = (8 \cdot 5) \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$ (il doppio di prima).

Vale anche, per ogni prestazione lavorativa, l'uguaglianza $\boxed{\frac{\text{euro}}{\text{ore}} = 8}$

da cui, per esempio, l'altra uguaglianza $\boxed{\frac{\text{euro}_{\text{MARTEDI}}}{\text{ore}_{\text{MARTEDI}}} = \frac{\text{euro}_{\text{GIOVEDI}}}{\text{ore}_{\text{GIOVEDI}}} = 8}$

che può essere scritta pure come proporzione: $\boxed{\text{euro}_{\text{MARTEDI}} : \text{ore}_{\text{MARTEDI}} = \text{euro}_{\text{GIOVEDI}} : \text{ore}_{\text{GIOVEDI}}}$

Si dice che **due grandezze x, y in relazione fra loro** (nell'es.: le ore lavorate, gli euro guadagnati) sono **DIRETTAMENTE PROPORZIONALI** (l'avverbio “direttamente” si può anche omettere) quando **la legge che le lega è della forma**

$$\boxed{y = k \cdot x}$$

dove k è una costante che prende il nome di “**coefficiente di proporzionalità** (diretta)”.

In questo caso vale l'uguaglianza

$$\boxed{\frac{y}{x} = k} \quad \text{(il loro RAPPORTO si mantiene COSTANTE!)}$$

da cui, per coppie di valori corrispondenti $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); \dots$

l'uguaglianza di rapporti $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots$

e quindi la possibilità di scrivere proporzioni come

$$\boxed{y_1 : x_1 = y_2 : x_2} \quad \text{ossia}$$

y_1	:	x_1	=	y_2	:	x_2
<i>un valore</i>		<i>... sta al</i>		<i>... come un</i>		<i>... sta al</i>
<i>di una</i>		<i>valore</i>		<i>altro valore</i>		<i>valore</i>
<i>grandezza</i>	<i>corrispondente</i>	<i>della prima</i>		<i>grandezza</i>	<i>corrispondente</i>	<i>dell'altra</i>
...	

OPPURE (permutando i medi)

$$\boxed{y_1 : y_2 = x_1 : x_2} \quad \text{ossia}$$

rapporto fra due valori di una grandezza = *rapporto fra i valori corrispondenti dell'altra grandezza, presi NELLO STESSO ORDINE*

b) PROPORZIONALITÀ INVERSA

“Se percorro quel tratto di strada a velocità doppia, ci metto metà del tempo”.

Da casa mia al posto dove lavoro ci sono 2 km.

Detesto spostarmi in automobile:

vado invece a piedi, viaggiando, all'andata, a 6 km/h, e mettendoci dunque 1/3 di ora (20 minuti).

Il ritorno lo faccio poi di corsa, a velocità doppia: 12 km/h, e ci metto quindi 1/6 di ora (10 minuti).

- 2 km, a 6 km all'ora: 1/3 di ora
- 2 km, a 12 km all'ora: 1/6 di ora
- 2 km, a 18 km all'ora: 1/9 di ora (la corsa di un bravo podista)
- 2 km, a 24 km all'ora: 1/12 di ora (in bici)
- ecc.

Se *raddoppia* la velocità di percorrenza di una distanza fissata, il tempo *si riduce alla metà*;
se *triplica* la velocità di percorrenza della stessa distanza, il tempo *si riduce alla terza parte*;
... ecc.

Vale la formula

$$\boxed{\text{tempo} = \frac{2}{\text{velocità}}} \quad (\text{tempo in ore, distanza fissa di 2 km, velocità espressa in km all'ora})$$

da cui, ad esempio, se

$$\text{velocità} = 8 \text{ km/h}, \text{ si avrà } \text{tempo} = \frac{2 \text{ km}}{8 \text{ km/h}} = \frac{1}{4} \text{ h} \quad (\text{un quarto d'ora, 15 minuti});$$

$$\text{velocità} = 16 \text{ km/h} \text{ (il doppio di prima)}, \text{ si avrà } \text{tempo} = \frac{2 \text{ km}}{16 \text{ km/h}} = \frac{1}{8} \text{ h} \quad (7' \text{ e } 30'', \text{ la metà di prima}).$$

Vale anche l'uguaglianza

$$\boxed{\text{tempo} \cdot \text{velocità} = 2}$$

da cui, per esempio, l'altra uguaglianza

$$\boxed{\text{tempo}_{\text{CORSA}} \cdot \text{velocità}_{\text{CORSA}} = \text{tempo}_{\text{BICI}} \cdot \text{velocità}_{\text{BICI}} = 2}$$

che, grazie alla proprietà fondamentale delle proporzioni applicata in senso inverso, può essere scritta pure sotto forma di proporzione:

$$\boxed{\text{tempo}_{\text{CORSA}} : \text{tempo}_{\text{BICI}} = \text{velocità}_{\text{BICI}} : \text{velocità}_{\text{CORSA}}}$$

Si dice che **due grandezze x, y in relazione fra loro**

(nel nostro esempio: la velocità e il tempo di percorrenza di una distanza fissata)

sono **INVERSAMENTE PROPORZIONALI** quando la legge che le lega è della forma

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

dove k è una costante che prende il nome di “coefficiente di proporzionalità inversa”.

In questo caso vale l'uguaglianza

$$\boxed{x \cdot y = k} \quad (\text{il loro PRODOTTO si mantiene COSTANTE!})$$

da cui, per coppie di valori corrispondenti $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); \dots$

le uguaglianze di prodotti $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \dots$

e quindi la possibilità di scrivere proporzioni come

$$\boxed{y_1 : y_2 = x_2 : x_1} \quad \text{ossia}$$

rapporto fra due valori di una grandezza = rapporto fra i valori corrispondenti dell'altra grandezza, ma **IN ORDINE SCAMBIATO**