4. SISTEMI A DUE INCOGNITE: IL METODO DI "RIDUZIONE" (DETTO ANCHE "DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE")

Si tratta di un metodo che in taluni casi "fortunati"
può rendere la risoluzione di un sistema assai rapida e divertente.

Non ci credi? Considera gli esempi che seguono.

- $\begin{cases} 9x+8y=22 \\ 5x-8y=6 \end{cases}$

Possiamo notare che **nelle due equazioni date, i termini contenenti *y* sono OPPOSTI** $(+8y,\ -8y)$.
Se quindi noi andiamo ad ADDIZIONARE MEMBRO A MEMBRO le due equazioni, otterremo un'equazione che non conterrà più la *y*, ma soltanto la *x*!

$$(1)+(2)\begin{cases} 14x=28 & (*) \\ 5x-8y=6 & (**) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ 5\cdot 2-8y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ 10-8y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ -8y=-4;\quad y=1/2 \end{cases}$$

(*)
Questa equazione proviene dalla somma membro a membro delle due equazioni iniziali:

$$\begin{array}{cccc} 9x & +8y & = & 22 \\ 5x & -8y & = & 6 \\ \hline 14x & // & = & 28 \end{array}$$

(**)
♥ Il sistema, che era partito con due equazioni, deve proseguire sempre con due equazioni. Quindi una (a scelta) fra le due equazioni di partenza va "recuperata". E' chiaro che, siccome si può scegliere, sarà preferibile recuperare la più semplice.

- Vediamo quest'altro esercizio.

$$\begin{cases} 5x+y=2 \\ 5x+4y=-19 \end{cases}$$

**Questa volta abbiamo due termini nella stessa incognita (la *x*) che sono UGUALI.
Perciò potremo far scomparire la *x*:
ci basterà SOTTRARRE MEMBRO A MEMBRO le due equazioni.**

$$\begin{matrix} (1)-(2) \\ (1) \end{matrix}\begin{cases} -3y=21 & (*) \\ 5x+y=2 & (**) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-7 \\ 5x-7=2;\ 5x=9;\ x=9/5 \end{cases}$$

(*)
Questa equazione proviene dalla sottrazione membro a membro delle due equazioni iniziali:

$$\begin{array}{cccc} 5x & +y & = & 2 \\ 5x & +4y & = & -19 \\ \hline // & -3y & = & 21 \end{array}$$

$y-4y=-3y$

$2-(-19)=2+19=21$

(**)
Equazione "recuperata" scegliendola fra le due di partenza, per completare il sistema.

- Nel caso del sistema seguente:

$$\begin{cases} 12x-5y=14 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$$

il metodo di riduzione sembrerebbe non applicabile,
in quanto né la *x* né la *y* hanno, nelle due equazioni,
ugual coefficiente, o coefficienti opposti.
Possiamo però osservare che i due termini con *x*
hanno coefficienti che sono uno multiplo dell'altro (infatti è $12=4\cdot 3$).
Se dunque **moltiplichiamo la seconda equazione per 4,
ci porteremo ad avere 12*x* anche nella seconda equazione,
dopodiché potremo sottrarre membro a membro e sbarazzarci di *x*.**

$$4\cdot\begin{cases}12x-5y=14\\3x+2y=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}12x-5y=14\\12x+8y=40\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}(2)-(1)\\(2)\end{array}\begin{cases}13y=26\ \text{(*)};\ \ y=2\\3x+2y=10\ \text{(**)};\ 3x+4=10;\ x=2\end{cases}$$

(*) Abbiamo preferito fare $(2)-(1)$ anziché $(1)-(2)$ esclusivamente per una piccola questione di opportunità: infatti in questo modo abbiamo ottenuto, sottraendo, un termine in *y* con coefficiente positivo ($+13y$)

(**) Delle due equazioni in gioco abbiamo recuperato la più semplice, che era poi la (2), presa PRIMA della moltiplicazione per 4.

- Ed ecco ora una situazione ancora più generale. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases}10x+7y=31\\4x-3y=-5\end{cases}$$

Qui non abbiamo, su di una stessa colonna, né due coefficienti uguali, né due coefficienti opposti, e nemmeno due coefficienti che siano uno multiplo dell'altro.
Tuttavia, **se proprio lo si desidera, il metodo di riduzione è applicabile anche in questo caso. Occorrerà, però, moltiplicare dapprima ENTRAMBE le equazioni, scegliendo i due moltiplicatori in modo che, al termine del procedimento, o la *x* o la *y* si trovi ad avere, nelle due equazioni, coefficienti uguali, o in alternativa opposti.**

A tale scopo:

- se vogliamo eliminare la *x*, moltiplicheremo la prima equazione per 2 e la seconda per 5, così da ottenere il termine 20*x* in entrambe e poi sottrarre membro a membro (oppure, potremmo moltiplicare la prima equazione per 2 e la seconda per –5 e poi *sommare* membro a membro);
- se vogliamo eliminare la *y*, moltiplicheremo la prima equazione per 3 e la seconda per 7, per ottenere +21*y* nella prima equazione e –21*y* nella seconda, e poi sommare membro a membro.

$$\begin{array}{r}2\cdot\\5\cdot\end{array}\begin{cases}10x+7y=31\\4x-3y=-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}20x+14y=62\\20x-15y=-25\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}(1)-(2)\\(2)\end{array}\begin{cases}29y=87;\ \ y=3\\4x-3y=-5;\ \ 4x-9=-5;\ \ 4x=4;\ \ x=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$$

NOTA
Le annotazioni a sinistra della graffa non sono, evidentemente, obbligatorie, ma sono estremamente utili per fissare le idee e per agevolare la rilettura.
L'annotazione (vedi esempio) "$(1)-(2)$" è opportuno che venga collocata *sulla riga nella quale viene effettuata la combinazione lineare.*

L'ultimo esercizio proposto mostra che, VOLENDO, il metodo di riduzione è applicabile SEMPRE.
Ma, ci si chiederà, IN QUALI CASI questo metodo è effettivamente PIU' CONVENIENTE rispetto al metodo di sostituzione?
La risposta dipende in una certa misura dalle preferenze dello studente …
Tuttavia, direi senz'altro che, almeno nei casi in cui due coefficienti di una stessa incognita risultino, fin dall'inizio, uguali oppure opposti, "riduzione" appare di gran lunga "vincente" rispetto a "sostituzione".

- *Ecco a proposito un ultimissimo esempio:*

$$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{7}=\dfrac{1}{3}y\\4(x+1)-7y+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{6x-3}{\cancel{21}}=\dfrac{7y}{\cancel{21}}\\4x+4-7y+1=0\end{cases}$$

OCCHIO!!! RICORDA che **QUASI SEMPRE,**
quando si deve risolvere un sistema di equazioni,
CONVIENE INNANZITUTTO
♪ MANDAR VIA GLI EVENTUALI DENOMINATORI
♫ e PORTARE IN "FORMA NORMALE":
in ciascuna equazione si dovrà avere
a 1° membro, un termine per ogni incognita presente;
a 2° membro, il termine noto.

$$\begin{cases}6x-7y=3\\4x-7y=-5\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}(1)-(2)\\(2)\end{array}\begin{cases}2x=8;\ \ x=4\\16-7y=-5;\ \ -7y=-21;\ \ y=3\end{cases}$$

Volendo, nel sistema qui a fianco risolto (preso nella sua "forma normale") avremmo potuto cambiare i segni di una delle due equazioni in gioco, dopodiché, avendosi 7*y* nell'una e –7*y* nell'altra, avremmo *sommato* membro a membro anziché sottratto.