

10. RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI 1° GRADO COL METODO DI CRAMER

Consideriamo il sistema (che è poi il generico sistema composto da due equazioni di 1° grado):

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

e proponiamoci di ricavare x col metodo di riduzione. Avremo:

$$\begin{aligned} & b' \cdot \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \\ & b \cdot \begin{cases} a'x + b'y = c' \\ ab'x + bb'y = b'c' \end{cases} \\ & \begin{cases} ab'x + bb'y = b'c \\ a'bx + bb'y = bc' \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) - (2) \quad (ab' - a'b)x = b'c - bc'$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \quad (\text{se } ab' - a'b \neq 0)$$

Si può notare ora che numeratore e denominatore possono essere scritti in forma di determinanti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

... e quest'ultima forma ha il pregio di essere **davvero facile da ricordare!** Infatti:

- ♪ a denominatore abbiamo il determinante costruito prendendo, nel sistema dato, i coeff. delle incognite
- ♪ mentre a numeratore abbiamo lo stesso determinante, nel quale però la colonna relativa ai coeff. di x (l'incognita che si sta calcolando) è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Se operiamo in modo analogo per ricavare y , otterremo

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Anche qui, analogamente al caso della x ,

- ♪ a denominatore ci ritroviamo il determinante dei coefficienti delle incognite
- ♪ e a numeratore abbiamo lo stesso determinante, nel quale però la colonna relativa ai coefficienti di y (l'incognita che si sta calcolando) è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Ricapitolazione.

Un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

può, volendo, essere risolto (“metodo di Cramer”) per mezzo delle due formule

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases},$$

dove:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \text{determinante dei coefficienti delle incognite}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

D_x, D_y (in queste scritture, lette “Di x ”, “Di y ”, x e y hanno il ruolo di *indici*)
sono i **determinanti ottenibili a partire dal determinante D , sostituendo, al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita che si vuole in quel momento ricavare, la colonna dei termini noti.**

OSSERVAZIONE Per completezza, occorre puntualizzare che le formule di Cramer valgono a condizione che sia $D \neq 0$. Nel caso risulti $D = 0$ il sistema è, a seconda dei casi, *impossibile* o *indeterminato* (pagg. 400, 401).

□ Esempio di applicazione

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 5y = -2 \end{cases} \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 2}{15 + 1} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6 - 4}{15 + 1} = \frac{-10}{16} = -\frac{5}{8}$$

Si può dimostrare poi che il “metodo di Cramer” (Gabriel Cramer, 1704-1752) vale anche per i sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite, di 4 equazioni in 4 incognite, ecc. (in generale: di n equazioni in n incognite).

♥ OSSERVAZIONE TERMINOLOGICA

L'aggettivo “**LINEARE**”, in Algebra, significa “**DI 1° GRADO**”.

Un'equazione è di 1° grado quando è riconducibile a un'uguaglianza fra due polinomi di 1° grado, oppure ad un polinomio di 1° grado, uguagliato a 0.

Un sistema di equazioni è di 1° grado quando tutte le equazioni che lo compongono sono di 1° grado.

Ad es., nel caso $n = 3$, abbiamo: $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$. Bene, sarà $x = \frac{D_x}{D}$; $y = \frac{D_y}{D}$; $z = \frac{D_z}{D}$,

$$\text{dove: } D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}; \quad D_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}; \quad D_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}; \quad D_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

D è il determinante dei coefficienti delle incognite

mentre **D_x**, **D_y**, **D_z** sono i determinanti ottenibili a partire dal determinante **D**, sostituendo,

al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita che si vuole ricavare, la colonna dei termini noti.

□ Esempio:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases} \quad \text{INCOLONNO, innanzitutto!} \quad \begin{cases} x + y & = & 4 \\ 2x & -z & = & 0 \\ 3x & -y & -4z & = & 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Incolonnare è molto importante,} \\ \text{per poter poi scrivere senza errori} \\ \text{i vari determinanti} \end{array}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 + 0}{1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-5) + 0} = \frac{-4}{-1 + 5} = \frac{-4}{4} = -1$$

Per esercizio, puoi calcolare tu stesso i valori di y e di z .

Alla fine, verifica la correttezza dei risultati sostituendo nelle tre equazioni del sistema iniziale.

ESERCIZI (METODO DI CRAMER)

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} & 2) \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} & 5) \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ 5y + 4z = 7 \end{cases} & 6) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = y - 1 \\ 3z - 2x = 5 \end{cases} & 7) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y - z - t = 2 \\ x + 2z = 1 \\ 2y - t = 3 \end{cases} \end{array}$$

Evidentemente, puoi, volendo, rifare con Cramer anche qualunque altro esercizio fra i tanti proposti.

8) ♥ Il metodo di Cramer, puramente “automatico”, è il più adatto ad essere utilizzato su di un computer, o comunque quando i coefficienti sono numeri con tante cifre. L'esercizio qui a fianco va svolto con l'aiuto di una calcolatrice o di un foglio elettronico; alla fine, fai la verifica.

$$\begin{cases} 35,58x - 57,73y = 23,09 \\ 10,78x + 25,43y = -2,37 \end{cases}$$

SOLUZIONI

$$1) \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/2 \end{cases} \quad 5) \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \quad 6) (-1, 0, 1) \quad 7) (x = 1, y = 1, z = 0, t = -1)$$