IL TEOREMA DI PITAGORA IN BREVE

Per una trattazione accurata, e per la dimostrazione, rimandiamo all'apposito capitolo del Volume 2.
Qui ci limitiamo a dare l'*enunciato*
(enunciato *algebrico*; il *geometrico* è sul Vol. 2)
e alcuni esempi di *esercizi*.

Dunque (**Teorema di Pitagora**):

**"In un triangolo rettangolo,
la somma dei quadrati dei cateti
è sempre uguale al quadrato dell'ipotenusa"**.

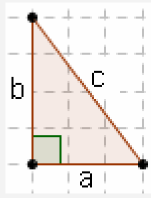
E anche (**Inverso del Teorema di Pitagora**):

**"Se in un triangolo accade
che la somma dei quadrati di due lati
sia uguale al quadrato del lato rimanente,
allora il triangolo è rettangolo"**.

Il triangolo
è rettangolo.
Allora

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

da cui



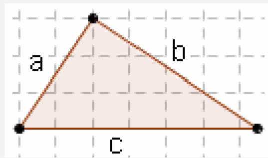
♪♪♪ "Guarda che cosa astrusa: la somma dei quadrati dei cateti mi dà il quadrato dell'ipotenusa!" ♪♪♪

$$c=\sqrt{a^2+b^2};\quad a=\sqrt{c^2-b^2};\quad b=\sqrt{c^2-a^2}$$

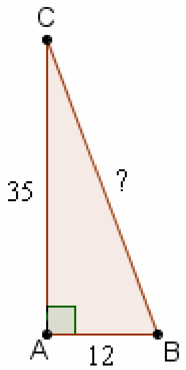
VICEVERSA, se si sa che

$$\boxed{a^2+b^2=c^2},$$

allora si può essere certi
che il triangolo è rettangolo
(l'angolo retto è quello opposto al lato di misura c)



a) Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha i cateti che misurano $AB=12$ cm, $AC=35$ cm. Quanto è lunga l'ipotenusa BC?

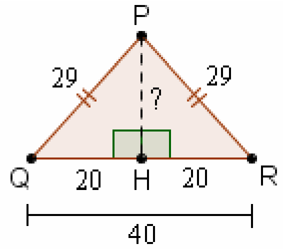


$$BC^2=AB^2+AC^2$$

da cui

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=$$
$$=\sqrt{12^2+35^2}=$$
$$=\sqrt{144+1225}=$$
$$=\sqrt{1369}=37\ \text{cm}$$

b) Nel triangolo isoscele PQR i lati obliqui PQ e PR misurano ciascuno cm 29, e si ha QR = cm 40. Determinare l'area.



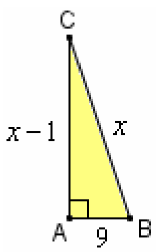
Tracciando l'alt. PH, si ha $QH=HR=QR/2=20$ cm
Allora, nel triangolo rettangolo PHR, è

$$PH=\sqrt{PR^2-HR^2}=\sqrt{29^2-20^2}=$$
$$=\sqrt{841-400}=\sqrt{441}=21\ \text{cm}$$

quindi $\mathit{Area}=\dfrac{QR\cdot PH}{2}=\dfrac{40\ \text{cm}\cdot 21\ \text{cm}}{2}=420\ \text{cm}^2$

c) Un triangolo i cui lati misurano metri 7, 24 e 25 ha qualcosa di speciale???
… Sì, perché se osserviamo che
$7^2+24^2=49+576=625=25^2$
potremo dedurre che il triangolo è rettangolo, in quanto la somma dei quadrati di due dei suoi lati uguaglia il quadrato del terzo lato. Abbiamo applicato ♥ L'INVERSO DEL TEOREMA DI PITAGORA.

d) In un triangolo rettangolo,
un cateto misura metri 9, e l'altro cateto
è inferiore di 1 metro all'ipotenusa.
Determina tutti i lati del triangolo.

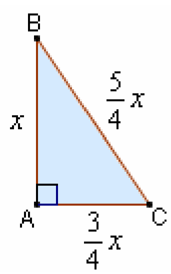


$$AB^2+AC^2=BC^2$$
$$\boxed{9^2+(x-1)^2=x^2}$$
$$81\ \cancel{+x^2}-2x+1=\cancel{x^2}$$
$$-2x=-82;\quad x=41$$
$$BC=41\ \text{m},\ AC=40\ \text{m}$$

♥ In questo problema, dunque, PITAGORA È STATO UTILIZZATO PER IMPOSTARE L'EQUAZIONE RISOLVENTE.

Inutile, nella fattispecie, sarebbe stato utilizzare formule inverse o radici quadrate: per scrivere un'uguaglianza contenente x, è bastata la relazione pitagorica "originaria".

e) In un triangolo rettangolo,
i cateti sono uno i ¾ dell'altro
e il perimetro misura 36*a*.
Determinare l'area.

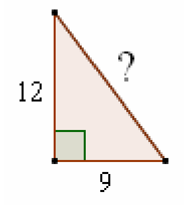


$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2}=\ldots=\frac{5}{4}x$$
$$x+\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}x=36a\quad\ldots\quad x=12a$$
$$AC=\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}\cdot 12a=9a$$
$$S=\frac{AC\cdot AB}{2}=\frac{9a\cdot 12a}{2}=54a^2$$

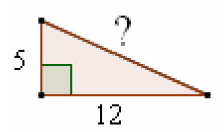
♥ In questo problema, dunque, PITAGORA È STATO UTILIZZATO PER ESPRIMERE UN SEGMENTO IN FUNZIONE DI *x*.

ESERCIZI SUL TEOREMA DI PITAGORA

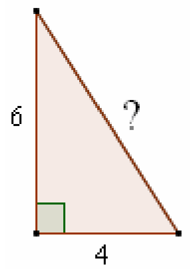
1)



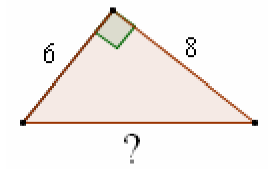
2)



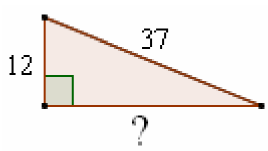
3)



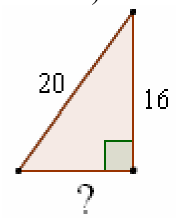
4)



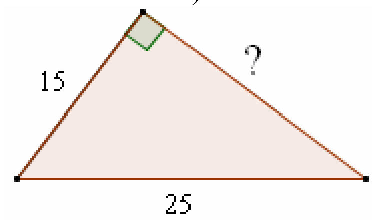
5)



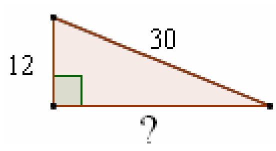
6)



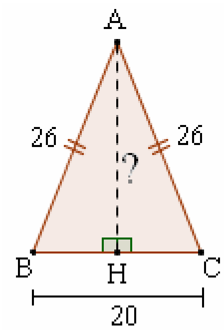
7)



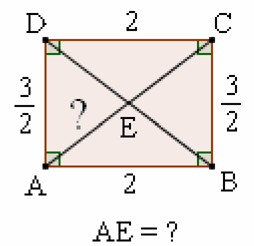
8)



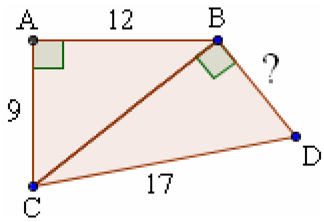
9)



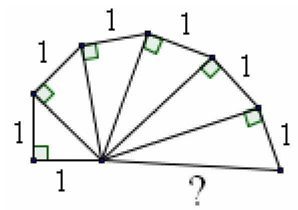
10)



11)



12)



Dal sito www.proprofs.com:

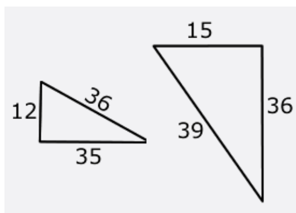
13) Two joggers run 8 miles north and then 15 miles west.
What is the shortest distance they must travel to return to their starting point?

Dal sito www.transum.org:

14a) A rectangular swimming pool is 21 m wide and 50 m long.
Calculate the length of a diagonal to 1 decimal place.

14b) A ladder is 6 m long. How far from the base of a wall should it be placed if it is to reach 5 m up the wall? Give your answer correct to 1 decimal place.

Dal sito www.emathematics.net: 15) Are these right triangles? →



RISPOSTE

1) 15 2) 13 3) $\sqrt{52} = 7,...$ 4) 10 5) 35 6) 12

7) 20 8) $\sqrt{756} = 27,...$ 9) 24 10) $5/4 = 1,25$ 11) 8 12) $\sqrt{7} = 2,6...$

13) 17 miles 14a) m 54,2… 14b) m 3,3…

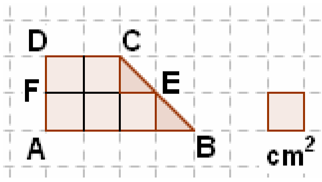
15) We can use the Converse of the Pythagorean Theorem to find if the triangles are right triangles.
If the equation $a^2 + b^2 = c^2$ is true, then we will have a right triangle.
The first triangle is not a right triangle; the second triangle is a right triangle.

AREE E VOLUMI IN BREVE

Un discorso approfondito sulle aree si trova nel capitolo di Teoria della Misura del Volume 2.
Qui ci accontentiamo di accennare a qualche idea elementare, riportando le formule principali.

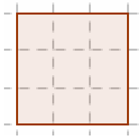
Cosa vuol dire calcolare l' "area" di una superficie?
Vuol dire chiedersi quante volte è contenuta, nella superficie in questione, *un'altra* superficie, quella che farà da "*unità di misura*", ad esempio: il quadrato di lato 1 cm (detto "centimetro quadrato", che si abbrevia in cm^2)

Il quadrilatero ABCD qui a fianco ha un'area di $6\ cm^2$.
L'area di ABEF è di $3{,}5\ cm^2$.



Si dimostra che valgono le seguenti formule, che permettono di calcolare le aree di alcune superfici particolari conoscendo le misure delle lunghezze di determinati segmenti.
Il simbolo indicante l'area in queste formule è S
(S come "Superficie"; si usa spesso dire, infatti, "superficie" per significare "area di una superficie")

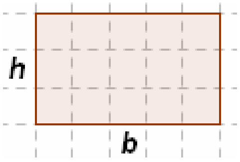
QUADRATO



ℓ

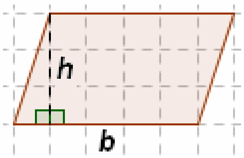
$S = \ell \cdot \ell = \ell^2$

RETTANGOLO



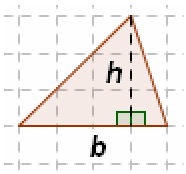
$S = base \cdot altezza = b \cdot h$

PARALLELOGRAMMO



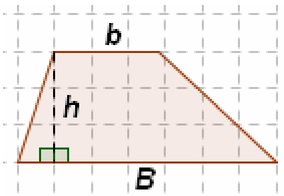
$S = base \cdot altezza = b \cdot h$

TRIANGOLO



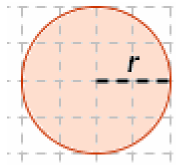
$$S = \frac{base \cdot altezza}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

TRAPEZIO



$$S = \frac{(base_{MAGG} + base_{min}) \cdot altezza}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

CERCHIO



$S = \pi \cdot r^2$
con $\pi = 3{,}14159...$

Se una superficie viene ingrandita in scala in modo che le sue DIMENSIONI LINEARI RADDOPPINO (es.: un poligono "gonfiato" in maniera che gli angoli restino uguali, ma raddoppino le misure dei lati), allora la sua AREA diventerà il QUADRUPLO.
Se il "rapporto di scala" è 3, il rapporto fra le aree (della figura ingrandita e di quella originaria) è 9.
Se il "rapporto di scala" è k, il rapporto fra le aree (della figura ingrandita e di quella originaria) è k^2.

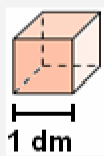
CENNI SUI VOLUMI; COS'E' UN "LITRO"

Il discorso per i volumi (trattato più in dettaglio nel capitolo di Geometria Solida del Vol. 2) **è analogo.**
Trovare il volume di un solido vuol dire chiedersi quante volte ci sta dentro, in quel solido, un *altro* solido, che farà da "*unità di misura*", ad es.: il cubo di lato 1 cm (detto "centimetro cubo", che si abbrevia in cm^3).

Se un solido viene ingrandito in scala in modo che le sue DIMENSIONI LINEARI vengano MOLTIPLICATE PER 2, allora il suo VOLUME ne risulterà MOLTIPLICATO PER 8.
In generale, se il "rapporto di scala" è k, il rapporto fra i volumi è k^3.

Il "LITRO" è a tutti gli effetti una misura di VOLUME, perché 1 litro di un liquido non è altro che 1 "decimetro cubo" (1 dm^3) di quel liquido, vale a dire: una quantità di quel liquido, pari a un cubo il cui lato misuri 1 decimetro (0,1 metri).
In un metro cubo di spazio ci stanno dunque 1000 litri.

1 litro = 1 dm^3



TERMINOLOGIA ALGEBRICA … DI ISPIRAZIONE GEOMETRICA

L'area di un quadrato ABCD si calcola elevando alla seconda la misura della lunghezza del lato: $S = \ell^2$.
"Elevare alla 2ª potenza, elevare all'esponente 2" fa venire in mente il calcolo dell'area di un quadrato.
Ecco perché si è affermata l'abitudine di dire "*eleviamo al quadrato*" anziché "*eleviamo all'esponente 2*".
Allo stesso modo, dato che il volume di un cubo si calcola con la formula $V = \ell^3$, dove ℓ è la lunghezza del lato del cubo, ci si è abituati a dire "*elevamento al cubo*" anziché "*elevamento all'esponente 3*".