

3. SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO PER RACCOGLIMENTI PARZIALI

Consideriamo il polinomio

$$ax + ay + bx + by$$

Non si tratta di un prodotto notevole svolto, e non c'è alcun fattore che sia comune a tutti i termini.

Tuttavia, se prendiamo i primi due termini soltanto, vediamo che essi hanno in comune il fattore a ;

raccogliendolo, si otterrebbe $a(x + y)$;

allo stesso modo, gli ultimi due termini hanno in comune il fattore b ,

e, raccogliendolo, si otterrebbe $b(x + y)$;

quindi così facendo, in entrambe le scomposizioni parziali, comparirebbe uno stesso fattore:

il binomio $(x + y)$!

Dunque

$$\underline{ax + ay} + \underline{bx + by} = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

L'ultimo passaggio è consistito nel raccogliere, fra i due "pezzi" $a(x + y)$ e $b(x + y)$, il binomio $(x + y)$. In pratica, il "blocco" $(x + y)$ è stato "trattato" come un numero unico.

Si dice che la scomposizione $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$ è stata eseguita "per **raccoglimenti parziali**".

Per convincerci della validità del procedimento, possiamo:

- svolgere il prodotto ottenuto $(x + y)(a + b)$ e constatare che, in effetti, si riottiene proprio il polinomio di partenza
- pensare di sostituire, per un istante, il blocco $(x + y)$ con una singola lettera: poniamo ad esempio $x + y = z$ e avremo $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = az + bz = z(a + b) = (x + y)(a + b)$

La scomposizione avrebbe potuto essere effettuata anche abbinando i termini in modo diverso:

$$\underline{ax + ay} + \underline{bx + by} = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Di fronte a un esercizio di scomposizione per raccoglimenti parziali,

è SEMPRE possibile abbinare i termini in due modi differenti.

Non staremo ad evidenziare tutte le volte questo fatto, che, ripeto, è normale si verifichi SEMPRE.

Ecco qui di seguito altri esempi di scomposizione per raccoglimenti parziali.

Una scomposizione per raccoglimenti parziali richiede di procedere per tentativi:

si tratta di **suddividere il polinomio dato in più "pezzi" tali che,**

raccogliendo in ciascun "pezzo" un opportuno fattore,

♥ **si riesca a FAR COMPARE FRA PARENTESI SEMPRE LO STESSO POLINOMIO.**

Dopo questa prima fase di raccoglimenti "**parziali**", si effettuerà il raccoglimento "**totale**" del polinomio che è stato fatto comparire, come fattore, in ciascun "pezzo".

a) $\underline{3a^2 + 3ax} + \underline{2a + 2x} = 3a(a + x) + 2(a + x) = (a + x)(3a + 2)$

b) $\underline{2ab - 6a} + \underline{-7b + 21} = 2a(b - 3) - 7(b - 3) = (b - 3)(2a - 7)$
 raccogliamo
 il fattore
 NEGATIVO
 -7

Qui è stato necessario raccogliere, fra gli ultimi due termini, un fattore NEGATIVO (-7)

c) $ax + 4x - ay - 4y = x(a + 4) - y(a + 4) = (a + 4)(x - y)$

d) $6ax + 2bx + 3a + b = 2x(3a + b) + 1 \cdot (3a + b) = (3a + b)(2x + 1)$

♥ **Qui sopra abbiamo dovuto, fra gli ultimi due termini, raccogliere il fattore "banale" +1.**

Di norma, in casi come questo,

si apre semplicemente una parentesi, sottintendendo il moltiplicatore 1.

Ci si accontenta cioè di raggruppare tra parentesi i termini in gioco, scrivendo soltanto

$$6ax + 2bx + 3a + b = 2x(3a + b) + (3a + b) = (3a + b)(2x + 1)$$

e) $3ab + 15a - b - 5 = 3a(b+5) - 1 \cdot (b+5) = (b+5)(3a-1)$

♥ Qui abbiamo dovuto, fra gli ultimi due termini, raccogliere il fattore -1 .

Di norma, in casi come questo, ci si limita a "METTERE IN EVIDENZA IL SEGNO $-$ ".

Vale a dire, si scrive il segno " $-$ " seguito da una parentesi nella quale finirà il polinomio con tutti i segni cambiati.

$$3ab + 15a - b - 5 = 3a(b+5) \underbrace{-(b+5)}_{\substack{\text{si è "messo"} \\ \text{in evidenza} \\ \text{il segno } -}} = (b+5)(3a-1)$$

Riflettiamo: un segno " $-$ " davanti equivale sempre a " $-1 \cdot$ " (moltiplicazione per -1).

Infatti,

un segno " $-$ " davanti a un numero ne indica l'opposto, cioè indica che quel numero va cambiato di segno; e una moltiplicazione per -1 porta esattamente allo stesso effetto!

$$-(b+5) = -1 \cdot (b+5)$$

f) $t^3 - t^2 - t + 1 = t^2(t-1) - (t-1) = (t-1)(t^2-1) = (t-1)(t+1)(t-1) = (t-1)^2(t+1)$

g) $xy^2 - 4xy + 4x - 3y^2 + 12y - 12 = x(y^2 - 4y + 4) - 3(y^2 - 4y + 4) = (y^2 - 4y + 4)(x-3) = (y-2)^2(x-3)$
oppure, abbinando i termini diversamente,

$$\underbrace{xy^2}_{*} - \underbrace{4xy}_{*} + \underbrace{4x}_{*} - \underbrace{3y^2}_{*} + \underbrace{12y}_{*} - \underbrace{12}_{*} = y^2(x-3) - 4y(x-3) + 4(x-3) = (x-3)(y^2 - 4y + 4) = (x-3)(y-2)^2$$

h) $a^{15} + a^{13} + a^{11} + a^9 = a^9(a^6 + a^4 + a^2 + 1) = a^9[a^4(a^2+1) + (a^2+1)] = a^9(a^2+1)(a^4+1)$

ESERCIZI (scomposizione per raccoglimenti parziali)

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $ac + bc + 3a + 3b$ | 2) $6xy + 5x - 12y - 10$ | 3) $a^2c + a^2d - b^2c - b^2d$ |
| 4) $3a^3 + 18a^2 + 4a + 24$ | 5) $ax + ay - x - y$ | 6) $ax + ay + x + y$ |
| 7) $a^2 + ab + ac + bc$ | 8) $xy - y^2 - xz + yz$ | 9) $abcd - ab - cd + 1$ |
| 10) $t^3 + 2t^2 - t - 2$ | 11) $a^3 + a^2 + a + 1$ | 12) $14ax - 6bx - 7ay + 3by$ |
| 13) $6ab + 6cd - 9ac - 4bd$ | 14) $x^4 + x^3 - x^2 - x$ | 15) $ax + 4x - ay - 4y$ |
| 16) $xy - x - y + 1$ | 17) $ab + 1 + a + b$ | 18) $4a^3 - 8a^2 - 9a + 18$ |
| 19) $t^3 - 6t^2 + t - 6$ | 20) $x^3y^3 + x^2y^2 + x^4y + xy^4$ | 21) $12ac^2 - 6ac - 4c + 2$ |
| 22) $a^{x+y} - 3a^x - 2a^y + 6$ | 23) $e^{3t} - e^{2t} + e^t - 1$ | 24) $x^{2a+b+c} + x^{a+b} + x^{a+c} + 1$ |
| 25) $ax - ay + at + bx - by + bt$ | 26) $3a^2 + 3ac - 3a^2c - 4ab - 4bc + 4abc$ | 27) $ax - bx - ay + by - a + b$ |
| 28) $ax - 2bx - 2ay + 4by + 3az - 6bz$ | 29) $18xw - 15yw - 12tx + 10ty + 20y - 24x$ | |
| 30) $b^{2x+y} - 2b^{x+y} + by - b^{2x} + 2b^x - 1$ | 31) $ax + bx - x - ay - by + y - a - b + 1$ | |
| 32) $a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - a^2b - ac^2 - a^2c + bc^2 + b^2c$ | 33) $a^2 - ab - ac + b + c - 1 = a^2 - ab - ac + a - a + b + c - 1 = \dots$ | |

RISULTATI

- | | | |
|----------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 1) $(a+b)(c+3)$ | 2) $(6y+5)(x-2)$ | 3) $(c+d)(a+b)(a-b)$ |
| 4) $(a+6)(3a^2+4)$ | 5) $(x+y)(a-1)$ | 6) $(x+y)(a+1)$ |
| 7) $(a+b)(a+c)$ | 8) $(x-y)(y-z)$ | 9) $(ab-1)(cd-1)$ |
| 10) $(t+2)(t+1)(t-1)$ | 11) $(a+1)(a^2+1)$ | 12) $(7a-3b)(2x-y)$ |
| 13) $(3a-2d)(2b-3c)$ | 14) $x(x+1)^2(x-1)$ | 15) $(a+4)(x-y)$ |
| 16) $(y-1)(x-1)$ | 17) $(b+1)(a+1)$ | 18) $(a-2)(2a+3)(2a-3)$ |
| 19) $(t-6)(t^2+1)$ | 20) $xy(x^2+y)(y^2+x)$ | 21) $2(2c-1)(3ac-1)$ |
| 22) $(a^y-3)(a^x-2)$ | 23) $(e^t-1)(e^{2t}+1)$ | 24) $(x^{a+c}+1)(x^{a+b}+1)$ |
| 25) $(x-y+t)(a+b)$ | 26) $(a+c-ac)(3a-4b)$ | 27) $(a-b)(x-y-1)$ |
| 28) $(a-2b)(x-2y+3z)$ | 29) $(6x-5y)(3w-2t-4)$ | |
| 30) $(by-1)(bx-1)^2$ | 31) $(a+b-1)(x-y-1)$ | |
| 32) $(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$ | 33) $(a-b-c+1)(a-1)$ | |

Il PRIMO raccoglimento,
negli esercizi,
conviene effettuarlo con
coefficiente POSITIVO



**SUGGERI-
MENTO
DA AMICO**