5. SCOMPOSIZIONE DI UNA DIFFERENZA DI QUADRATI NON BANALE

Sono piuttosto frequenti, e importanti nella pratica del calcolo,
situazioni nelle quali occorre fattorizzare una differenza di quadrati "non banale".
Dicendo "non banale" mi riferisco al fatto che le due espressioni elevate al quadrato
non sono entrambe dei semplici monomi, ma almeno una di esse è un polinomio.
Gli esempi che seguono illustrano come procedere in questi casi.

a) $x^2+2x-y^2+1=\left(x^2+2x+1\right)-y^2=\left(x+1\right)^2-y^2 \underset{\text{somma basi} \times \text{diff. basi}}{\overset{\text{differenza quadrati}}{=}} \left(x+1+y\right)\left(x+1-y\right)$

b) $a^2-b^2-2bc-c^2=a^2-\left(b^2+2bc+c^2\right)=a^2-\left(b+c\right)^2=\left[a+\left(b+c\right)\right]\cdot\left[a-\left(b+c\right)\right]=\left(a+b+c\right)\left(a-b-c\right)$

c) $t^4-16t^2+24t-9=t^4-\left(16t^2-24t+9\right)=$
$=\left(t^2\right)^2-\left(4t-3\right)^2=\left[t^2+\left(4t-3\right)\right]\left[t^2-\left(4t-3\right)\right]=$
$=\underbrace{(t^2+4t-3)}_{\downarrow}(t^2-4t+3)=(t^2+4t-3)(t-1)(t-3)$

non scomponibile
per tentativi (NOTA 1)

NOTA 1
Il trinomio t^2+4t-3 non è scomponibile per tentativi,
ma sarebbe scomponibile conoscendo l'apposita
formula di scomposizione, che porterebbe a ottenere
$t^2+4t-3=\left(t+2+\sqrt{7}\right)\left(t+2-\sqrt{7}\right)$

d) $t^4-4t^3+4t^2-64=$
$=\left(t^2-2t\right)^2-64=$
$=\underbrace{(t^2-2t+8)}_{\downarrow}(t^2-2t-8)=$

NON
scomponibile
(NOTA 2)

$=(t^2-2t+8)(t-4)(t+2)$

NOTA 2 - Per vedere se un trinomio di 2° grado assegnato ax^2+bx+c è fattorizzabile, basta calcolare la quantità b^2-4ac
(detta "il **discriminante**" o "il **delta**" del trinomio).

- Se b^2-4ac è un quadrato perfetto,
  il trinomio è fattorizzabile per tentativi elementari
- Se $b^2-4ac>0$, ma b^2-4ac *non* è un quadrato perfetto, il trinomio
  è fattorizzabile, ma non per tentativi elementari
- Se $b^2-4ac<0$, il trinomio non è fattorizzabile
  (a meno di ricorrere ai cosiddetti "numeri complessi")
- Se $b^2-4ac=0$, il trinomio è uguale al quadrato di un binomio,
  eventualmente moltiplicato per una costante.

Es.: sarà fattorizzabile il trinomio $6x^2-x-2$? Vediamo:
$b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot6\cdot(-2)=1+48=49$, e 49 è un quadrato perfetto.
Allora il trinomio è fattorizzabile per tentativi elementari.

e) $a^2+b^2+c^2-d^2-e^2-2ab-2ac+2bc-2de=$
$=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc-d^2-e^2-2de=\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc\right)-\left(d^2+e^2+2de\right)=$
$=\left(a-b-c\right)^2-\left(d+e\right)^2=\left(a-b-c+d+e\right)\left(a-b-c-d-e\right)$

IL "METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO"

E' un metodo che dobbiamo conoscere perché viene utilizzato, in matematica, in diversi ambiti rilevanti
(ad es., vedremo che interviene nella *costruzione della formula risolutiva delle equazioni di 2° grado*)

I) $\underbrace{x^2+2x}_{}$ $-143=x^2+2x+1-144=\left(x+1\right)^2-144=\left(x+1+12\right)\left(x+1-12\right)=\left(x+13\right)\left(x-11\right)$

un buon inizio
per un quadrato
di binomio!!! ...
Se avessimo anche
un +1 finale ...

II) $9a^2-12a-437=9a^2-12a+4-441=\left(3a-2\right)^2-21^2=\left(3a-2+21\right)\left(3a-2-21\right)=\left(3a+19\right)\left(3a-23\right)$

III) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2-x^2+1=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

IV) $\underset{\left(5a^2\right)^2}{25a^4}\boxed{-24a^2}\underset{2^2}{+4}=25a^4\boxed{-20a^2}\boxed{-4a^2}+4=\left(5a^2-2\right)^2-\left(2a\right)^2=\left(5a^2+2a-2\right)\left(5a^2-2a-2\right)$

doppio prodotto
($+20\,a^2-44\,a^2$
non avrebbe
"funzionato"...)

Gli ultimi due esempi mostrano come il metodo del completamento del quadrato possa consentire
(non sempre, ma almeno in determinati casi)
di fattorizzare un **trinomio biquadratico, "resistente"** alla scomposizione con altri metodi.

ESERCIZI (scomposizione di una differenza di quadrati non banale)

1) $a^2+2ab+b^2-49$ 2) $a^2-2ab+b^2-49$ 3) x^2-a^2-2a-1 4) x^2-a^2+2a-1
5) $x^2+2xy+y^2-4t^2$ 6) $49x^2-a^2-2ab-b^2$ 7) $25b^2-10b+1-4c^2$
8) a^2-b^2+6b-9 9) $x^2+y^2-z^2-2xy+2z-1$ 10) $a^2-b^2-c^2+2bc-2b+2c-1$
11) $18a^2+8b^2-24ab-2$ 12) $2xy-x^2-y^2+9$ 13) $9t^2-6t+1-a^2$
14) x^2-y^2-2y-1 15) a^4-a^2+4a-4 16) $x^2+y^2+1+2xy+2x+2y-z^2$
17) $b^2c^2-b^2-c^2-1+2bc+2b-2c$ 18) e^4-4e^2+4e-1
19) $e^4-4e^2-12e-9$ 20) $36e^4-e^2+2e-1$ 21) $a^{2t}-2a^t+1-b^2$
22) $a^{4k}-9a^{2k}+12a^k-4$ 23) $x^{16}-25x^8+40x^4-16$ 24) $25a^2+10ab+b^2-49c^2$
25) $y^{10}-y^6+4y^4-4y^2$ 26) $a^4+2a^3+a^2-9$ 27) $p^2(2p-1)^2-1$

Scomporre col **metodo del COMPLETAMENTO DEL QUADRATO**:

28) $c^2-6c-91$ in due modi:
A. completamento del quadrato
B. “trinomio speciale”

29) $x^2+40x+399$

30) $9y^2-6y-899$

31) $4x^4+4x^2-15$ in due modi:
A. completamento del quadrato
B. “trinomio non speciale” (variante)

32) $x^4+5x^2+9=x^4+6x^2-x^2+9=\ldots$

33) $x^4-31x^2+9=x^4-6x^2-25x^2+9=\ldots$

34) y^4-3y^2+1

35) $4t^4+11t^2+9$

36) $4a^4-37a^2b^2+9b^4$ addirittura in TRE modi!!! ⇨

37) $a^8+a^6+a^4$

Da http://betterlesson.com

Homework

Complete the square
for each expression.
Write the resulting expression
as a binomial squared.

$x^2-18x+\square$

$x^2+10x+\square$

$x^2-\frac{1}{2}x+\square$

RISULTATI

1) $(a+b+7)(a+b-7)$ 2) $(a-b+7)(a-b-7)$ 3) $(x+a+1)(x-a-1)$ 4) $(x+a-1)(x-a+1)$
5) $(x+y+2t)(x+y-2t)$ 6) $(7x+a+b)(7x-a-b)$ 7) $(5b-1+2c)(5b-1-2c)$
8) $(a+b-3)(a-b+3)$ 9) $(x-y+z-1)(x-y-z+1)$ 10) $(a+b-c+1)(a-b+c-1)$
11) $2(3a-2b+1)(3a-2b-1)$ 12) $(3+x-y)(3-x+y)$ 13) $(3t-1+a)(3t-1-a)$
14) $(x+y+1)(x-y-1)$ 15) $(a+2)(a-1)(a^2-a+2)$ 16) $(x+y+1+z)(x+y+1-z)$
17) $(c+1)(b-1)(bc-b+c+1)$ 18) $(e^2+2e-1)(e-1)^2$ 19) $(e^2+2e+3)(e-3)(e+1)$
20) $(3e-1)(2e+1)(6e^2-e+1)$ 21) $(a^t-1+b)(a^t-1-b)$ 22) $(a^{2k}+3a^k-2)(a^k-2)(a^k-1)$
23) $(x^2+1)(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2-2)(x^8+5x^4-4)$ 24) $(5a+b+7c)(5a+b-7c)$
25) $y^2(y^2+2)(y+1)(y-1)(y^4-y^2+2)$ 26) $(a^2+a+3)(a^2+a-3)$
27) $[p(2p-1)]^2-1=\ldots=(2p^2-p+1)(p-1)(2p+1)$
28) $(c+7)(c-13)$ 29) $(x+21)(x+19)$ 30) $(3y+29)(3y-31)$ 31) $(2x^2+5)(2x^2-3)$
32) $(x^2+x+3)(x^2-x+3)$ 33) $(x^2+5x-3)(x^2-5x-3)$
34) $(y^2+y-1)(y^2-y-1)$ 35) $(2t^2+t+3)(2t^2-t+3)$ 36) $(2a+b)(2a-b)(a+3b)(a-3b)$
37) $a^8+a^6+a^4=a^4(a^4+a^2+1)=a^4(a^4+2a^2-a^2+1)=\ldots=a^4(a^2+a+1)(a^2-a+1)$