

6. SCOMPOSIZIONE DI UNA SOMMA E DI UNA DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO

A) DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO DISPARI

Per fattorizzare una differenza di due potenze di ugual grado dispari, si applicano le formule seguenti:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^5 - b^5 &= (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \\ a^7 - b^7 &= (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6) \\ &\dots \text{ ecc. } \dots \end{aligned}$$

La validità di queste formule può essere verificata rieseguendo la moltiplicazione a secondo membro: si constaterà che si riottiene esattamente l'espressione a primo membro.

Ad esempio: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3$, OK

Va detto che esiste anche *un metodo generale* per “costruire” tutta questa famiglia di formule (così come l'altra famiglia, che vedremo subito dopo, relativa alla *somma* di due potenze di ugual grado). Tale metodo generale presuppone, per poter essere compreso, la conoscenza della tecnica di fattorizzazione “alla Ruffini”; ce ne occuperemo perciò successivamente al paragrafo ad essa dedicato.

Esempi di applicazione:

- $27x^3 - 125 = (3x)^3 - 5^3 = (3x - 5)(9x^2 + 15x + 25)$
- $a^6 - \frac{1}{8} = (a^2)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)\left(a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\right)$
- $32t^5 - 1 = (2t)^5 - 1 = (2t - 1)(16t^4 + 8t^3 + 4t^2 + 2t + 1)$

B) SOMMA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO DISPARI

Per fattorizzare una somma di due potenze di ugual grado dispari, si applicano le formule che seguono:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^5 + b^5 &= (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\ a^7 + b^7 &= (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) \\ &\dots \text{ ecc. } \dots \end{aligned}$$

Verifichiamo, ad esempio, la formula per la scomposizione di una somma di cubi:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3, \text{ OK}$$

NOTA

♥ **I trinomi** $a^2 \pm ab + b^2$

che “escono” dalla scomposizione di una somma o di una differenza di cubi

sono anche chiamati “i falsi quadrati”,

perché “assomigliano” al quadrato di un binomio,

se non fosse per il fatto che mancano del doppio prodotto $2ab$,

rimpiazzato invece dal “prodotto semplice” ab .

♥ **Tali “falsi quadrati” in generale non sono scomponibili;**

lo sono soltanto eccezionalmente, e comunque a patto che gli esponenti in gioco siano “alti”.

Capiterà di imbattersi in qualche caso di questo tipo più avanti.

Esempi di applicazione:

- $125y^3 + 8 = (5y)^3 + 2^3 = (5y + 2)(25y^2 - 10y + 4)$
- $t^5 + 100000 = t^5 + 10^5 = (t + 10)(t^4 - 10t^3 + 100t^2 - 1000t + 10000)$
- $b^7 + 1 = b^7 + 1^7 = (b + 1)(b^6 - b^5 + b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$

C) DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO PARI

Una differenza di due potenze di ugual grado pari è spesso interpretabile in più modi diversi; tuttavia, fra le possibili interpretazioni, c'è anche quella di “vederla” come una differenza di quadrati. E' l'interpretazione più semplice, ed è senza dubbio quella che conviene privilegiare, in un'ottica di scomposizione in fattori, perché porta alle situazioni algebriche più comode.

Consideriamo il seguente esempio:

$$x^6 - 64y^6 = \begin{cases} \text{i)} & (x^3)^2 - (8y^3)^2 \text{ (L'INTERPRETAZIONE PIU' CONVENIENTE PER UNA SCOMPOSIZIONE!!!)} \\ \text{ii)} & (x^2)^3 - (4y^2)^3 \text{ interpretazione possibile, ma poi la scomposizione sarebbe laboriosa ...} \\ \text{iii)} & x^6 - (2y)^6 \text{ interpretazione possibile, ma poi la scomposizione sarebbe laboriosa ...} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad x^6 - 64y^6 &= (x^3)^2 - (8y^3)^2 = \\ &= (x^3 + 8y^3)(x^3 - 8y^3) = \\ &\text{differenza di quadrati} \\ &= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) \\ &\text{somma e differenza di cubi} \end{aligned}$$

Se si interpreta come **differenza di quadrati**, tutto fila liscio come l'olio: la scomposizione risulta facilissima

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad x^6 - 64y^6 &= (x^2)^3 - (4y^2)^3 = \\ &= (x^2 - 4y^2)(x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4) = \\ &\text{differenza di cubi} \\ &= (x + 2y)(x - 2y)(x^4 + 8x^2y^2 - 4x^2y^2 + 16y^4) = \\ &= (x + 2y)(x - 2y) \left[(x^2 + 4y^2)^2 - 4x^2y^2 \right] = \\ &= (x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2 + 2xy)(x^2 + 4y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

Se si interpreta come **differenza di cubi**, la scomposizione è molto più difficoltosa: si ottiene un trinomio biquadratico omogeneo, che si riesce a scomporre soltanto col metodo del completamento del quadrato

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad x^6 - 64y^6 &= x^6 - (2y)^6 = \\ &= (x - 2y)(x^5 + 2x^4y + 4x^3y^2 + 8x^2y^3 + 16xy^4 + 32y^5) = \\ &= (x - 2y) \left[x^4(x + 2y) + 4x^2y^2(x + 2y) + 16y^4(x + 2y) \right] = \\ &= (x - 2y)(x + 2y)(x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4) = \\ &= (x - 2y)(x + 2y)(x^2 + 4y^2 + 2xy)(x^2 + 4y^2 - 2xy) \\ &\text{come sopra} \end{aligned}$$

Se si interpreta come differenza di seste potenze, si ricorrerà alla formula (pag. 238)

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

La scomposizione è lunga e pesante: si effettuano dei raccoglimenti parziali, poi si applica il metodo del completamento del quadrato come nell'interpretazione precedente

D) SOMMA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO PARI

Una somma di due potenze di ugual grado pari **NON** è scomponibile, A MENO CHE si possa interpretare pure come somma di due potenze di ugual grado dispari.

$a^2 + b^2$ NON SCOMPONIBILE

$$a^{10} + b^{10} = (a^2)^5 + (b^2)^5 = \dots$$

$a^4 + b^4$ NON SCOMPONIBILE

$$a^{12} + b^{12} = (a^4)^3 + (b^4)^3 = \dots$$

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

$$a^{14} + b^{14} = (a^2)^7 + (b^2)^7 = \dots$$

$a^8 + b^8$ NON SCOMPONIBILE

$$a^{16} + b^{16} \text{ NON SCOMP.}$$

Alla fin dei conti, la “non scomponibilità” è limitata ai soli casi in cui l'esponente è una potenza di 2 e quindi, se scomposto in fattori primi, non contiene fattori dispari.

$$\text{Esempio: } x^6 + 64y^6 = (x^2)^3 + (4y^2)^3 \stackrel{\text{somma di cubi}}{=} (x^2 + 4y^2)(x^4 - 4x^2y^2 + 16y^4)$$

Ricapitolazione compatta delle formule

$$\begin{aligned}
 a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \\
 a^5 \pm b^5 &= (a \pm b)(a^4 \mp a^3b + a^2b^2 \mp ab^3 + b^4) \\
 a^7 \pm b^7 &= (a \pm b)(a^6 \mp a^5b + a^4b^2 \mp a^3b^3 + a^2b^4 \mp ab^5 + b^6) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Quando si usa il *doppio segno* in ambo i membri di un'uguaglianza si intende che si devono leggere: una prima volta, tutti i segni "sopra"; una seconda volta, tutti i segni "sotto"

Esempi vari sulla scomposizione di una somma o differenza di due potenze di ugual grado

- $375z^3 - 3 = 3(125z^3 - 1) = 3(5z - 1)(25z^2 + 5z + 1)$
- $x^{13} - x = x(x^{12} - 1) = x(x^6 + 1)(x^6 - 1) = x[(x^2)^3 + 1](x^3 + 1)(x^3 - 1) =$
 $= x(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) =$
 $= x(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$
riordinando, solo per eleganza
- $t^{13} - t^9 - t^6 + t^2 = t^2(t^{11} - t^7 - t^4 + 1) = t^2[t^7(t^4 - 1) - (t^4 - 1)] =$
 $= t^2(t^4 - 1)(t^7 - 1) = t^2(t^2 + 1)(t^2 - 1)(t - 1)(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) =$
 $= t^2(t^2 + 1)(t + 1)(t - 1)^2(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$
- $a^{10} + 1024 = a^{10} + 2^{10} = (a^2)^5 + 4^5 = (a^2 + 4)(a^8 - 4a^6 + 16a^4 - 64a^2 + 256)$

ESERCIZI (scomposizione di una somma o differenza di due potenze di ugual grado)

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $x^3 - 8$ | 2) $x^3 + 8$ |
| 3) $8x^3 - 27y^3$ | 4) $8x^3 + 27y^3$ |
| 5) $\frac{1}{8}t^3 - 1$ | 6) $\frac{1}{8}t^3 + 1$ |
| 7) $a^5 - 32$ | 8) $a^5 + 32$ |
| 9) $x^4 - 16$ | 10) $x^5 - y^{10}$ |
| 11) $1 - a^{14}$ | 12) $x^{13} + xy^3$ |
| 13) $x^6 - y^6$ | 14) $x^6 + y^6$ |
| 15) $x^8 - y^8$ | 16) $x^8 + y^8$ |
| 17) $t^6 - 64$ | 18) $t^6 + 64$ |
| 19) $a^3b^3 - 27$ | 20) $a^3b^3 + 27$ |
| 21) $\frac{1}{8}a^3 \pm \frac{1}{27}b^3$ | 22) $32b^5 \pm \frac{1}{32}$ |
| 23) $a^{12} - 1$ | 24) $a^{16} - 1$ |
| 25) $a^{12} + 1$ | 26) $a^{16} + 1$ |
| 27) $54x^6 + 250$ | 28) $8a^{3k} - b^{3n}$ |
| 29) $81 - h^4$ | 30) $c - c^4$ |
| 31) $81 + h^4$ | 32) $\alpha^9 - 1$ |
| 33) $8m^5 + m^2$ | 34) $a^{3k+4} - a$ |
| 35) $1 + \ell^5$ | 36) $36b^2 - 49$ |
| 37) $36b^2 + 49$ | 38) $a^7 - a^4 - a^3 + 1$ |
| 39) $a^6 - 9a^3 + 8$ | 40) $8a^6 + 9a^3 + 1$ |

Dal sito www.purplemath.com:

The other two special factoring formulas are two sides of the same coin: the sum and difference of cubes.

These are the formulas:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Some people use the mnemonic "SOAP" for the signs; the letters stand for

"Same" as the sign in the middle of the original expression,

"Opposite" sign, and "Always Positive".

$$a^3 \pm b^3 =$$

$$= (a \text{ [same sign] } b)(a^2 \text{ [opposite sign] } ab \text{ [always positive] } b^2)$$

RISULTATI

- 1) $(x-2)(x^2+2x+4)$
- 2) $(x+2)(x^2-2x+4)$
- 3) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$
- 4) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$
- 5) $\left(\frac{1}{2}t-1\right)\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)$
- 6) $\left(\frac{1}{2}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t+1\right)$
- 7) $(a-2)(a^4+2a^3+4a^2+8a+16)$
- 8) $(a+2)(a^4-2a^3+4a^2-8a+16)$
- 9) $(x^2+4)(x+2)(x-2)$
- 10) $(x-y^2)(x^4+x^3y^2+x^2y^4+xy^6+y^8)$
- 11) $(1+a)(1-a)(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)$
- 12) $x(x^4+y)(x^8-x^4y+y^2)$
- 13) $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
- 14) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
- 15) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
- 16) Non scomponibile
- 17) $(t+2)(t^2-2t+4)(t-2)(t^2+2t+4)$
- 18) $(t^2+4)(t^4-4t^2+16)$
- 19) $(ab-3)(a^2b^2+3ab+9)$
- 20) $(ab+3)(a^2b^2-3ab+9)$
- 21) $\left(\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2 \mp \frac{1}{6}ab + \frac{1}{9}b^2\right)$
- 22) $\left(2b \pm \frac{1}{2}\right)\left(16b^4 \mp 4b^3 + b^2 \mp \frac{1}{4}b + \frac{1}{16}\right)$
- 23) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$
- 24) $(a^8+1)(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$
- 25) $(a^4+1)(a^8-a^4+1)$
- 26) Non scomponibile
- 27) $2(3x^2+5)(9x^4-15x^2+25)$
- 28) $(2a^k-b^n)(4a^{2k}+2a^kb^n+b^{2n})$
- 29) $(9+h^2)(3+h)(3-h)$
- 30) $c(1-c)(1+c+c^2)$
- 31) Non scomponibile
- 32) $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^6+\alpha^3+1)$
- 33) $m^2(2m+1)(4m^2-2m+1)$
- 34) $a(a^{k+1}-1)(a^{2k+2}+a^{k+1}+1)$
- 35) $(1+\ell)(1-\ell+\ell^2-\ell^3+\ell^4)$
- 36) $(6b+7)(6b-7)$
- 37) Non scomponibile
- 38) $(a+1)(a-1)^2(a^2+1)(a^2+a+1)$
- 39) $(a-1)(a^2+a+1)(a-2)(a^2+2a+4)$
- 40) $(a+1)(a^2-a+1)(2a+1)(4a^2-2a+1)$

Le successive pagine 238-239 mostreranno che sussistono le seguenti formule:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

QUALUNQUE SIA $n = 3, 4, 5, 6, \dots$

Perciò

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

...

$$a^n + b^n =$$

$$= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

SOLO CON n DISPARI,

mentre con n pari,

non esiste *nessuna* formula del tipo

$$a^n + b^n = (a+b)(\dots\dots\dots)$$

Perciò

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

...