7. SCOMPOSIZIONE IN FATTORI COL METODO DI RUFFINI

Ricordiamo innanzitutto il **TEOREMA DEL RESTO** (pag. 116), che dice:

"il resto della divisione $\mathbf{P}(x):(x-k)$ è uguale a $\mathbf{P}(k)$, cioè al numero che si ottiene sostituendo il numero *k* al posto di *x* nel polinomio dividendo, e svolgendo i calcoli"

Indicato quindi con $\mathrm{Q}(x)$ il quoziente della divisione $\mathrm{P}(x):(x-k)$, varrà l'identità:

$$\boxed{\mathbf{P(x)=}}\ \mathrm{Q}(x)\cdot(x-k)+\mathrm{R}=\boxed{\mathbf{Q}(x)\cdot(x-k)+\mathbf{P}(k)}$$

A questo punto un occhio attento può cogliere un fatto apparentemente banale,
ma che in realtà porta con sé delle conseguenze molto importanti:
nel caso risulti $\mathbf{P}(k)=0$, l'identità diventa semplicemente $\mathbf{P}(x)=\mathbf{Q}(x)\cdot(x-k)$.

Mumble, mumble … ma allora … con questa osservazione abbiamo scoperto che, nel caso in cui risulti $\mathbf{P}(k)=0$, il polinomio $\mathbf{P}(x)$ è scomponibile in fattori!
E precisamente, la sua scomposizione è il prodotto $\mathrm{Q}(x)\cdot(x-k)$,
essendo $\mathrm{Q}(x)$ il quoziente della divisione $\mathrm{P}(x):(x-k)$!!!

**Pertanto, se abbiamo un polinomio $\mathbf{P}(x)$ da scomporre in fattori,
e non siamo riusciti nel nostro intento con nessuna delle tecniche precedentemente apprese,
potremmo fare un ultimo tentativo per la scomposizione:**
**♥ se riusciamo a trovare un numero k tale che $\mathbf{P}(k)=0$,
ossia un numero *k* che sostituito al posto della variabile *x* renda il valore di $\mathbf{P}(x)$ uguale a zero,
allora il polinomio $\mathbf{P}(x)$ sarà scomponibile, e precisamente sarà scomponibile
nel prodotto $\mathbf{Q}(x)\cdot(x-k)$, essendo $\mathbf{Q}(x)$ il quoziente della divisione $\mathbf{P}(x):(x-k)$.**

Ad esempio, sia da scomporre il polinomio $\mathrm{P}(x)=3x^3+5x^2-16x-12$.
Si può constatare che questo polinomio **resiste a tutti i tentativi di scomposizione** con i "vecchi" metodi.
L' "ultima spiaggia" per tentare di scomporlo starà dunque nel cercare un numero *k* tale che P(*k*)=0: in breve, nel cercare uno "zero" del polinomio.

Negli esercizi proposti sui manuali scolastici il polinomio P(x) ha quasi sempre coefficienti interi, e anche la ricerca di k si limita, per semplicità, al solo campo dei numeri interi, o, al più, dei numeri razionali.

In tal caso (ripetiamo: **polinomio P(x) a coefficienti interi; ricerca del "k" nel solo ambito dei razionali) si può dimostrare che lo "zero" k, ammesso che esista, si deve trovare necessariamente fra quei numeri frazionari (o, in particolare, interi), che hanno**
♪ **a numeratore, un divisore del termine noto del polinomio P(x)**
♫ **e a denominatore, un divisore del 1° coefficiente di P(x)**

Via dunque con gli **ESEMPI**.

a) Vediamo come fare nel caso del polinomio inizialmente considerato $\mathrm{P}(x)=3x^3+5x^2-16x-12$

- I **divisori del T. N.** sono i numeri $\pm1\quad\pm2\quad\pm3\quad\pm4\quad\pm6\quad\pm12$
- i **divisori del 1° COEFF.** sono i numeri $\pm1\quad\pm3$
  quindi i "**possibili zeri razionali**"
  (in pratica: i "numeri con cui provare a sostituire, sperando di ottenere 0"), saranno:
  $\pm1\quad\pm2\quad\pm3\quad\pm4\quad\pm6\quad\pm12\quad\pm\frac{1}{3}\quad\pm\frac{2}{3}\quad\pm\frac{4}{3}$

Si vede, col calcolo, che risulta $\mathrm{P}(2)=0$.
Allora $\mathrm{P}(x)$ sarà scomponibile nel prodotto $\mathrm{Q}(x)\cdot(x-2)$
essendo $\mathrm{Q}(x)$ il quoziente della divisione $\mathrm{P}(x):(x-2)$.
Andiamo perciò a calcolare tale quoziente mediante la Regola di Ruffini.

$$\left(3x^3+5x^2-16x-12\right):\left(x-2\right)\qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 5 & -16 & -12\\ 2 & & 6 & 22 & 12\\ \hline & 3 & 11 & 6 & 0\end{array}\quad\to\quad \mathrm{Q}(x)=3x^2+11x+6$$

In definitiva $\boxed{3x^3+5x^2-16x-12=\left(3x^2+11x+6\right)\left(x-2\right)}\underset{\substack{trinomio\\ non\ speciale}}{=}\ \dots\ =\left(3x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)$

Il polinomio ha finalmente "ceduto": evviva! Siamo riusciti a scomporlo!!!

b) Sotto ora con un nuovo polinomio: $\mathrm{P}(a)=6a^4+7a^3+6a^2+3a-2$

La timida Marinella si sente in imbarazzo di fronte alla difficoltà di questo argomento. Dài, Marinella, coraggio! La teoria è complicata, senza dubbio, ma in compenso l'applicazione pratica, con un po' di esercizio, non è niente di speciale.

Divisori del T. N. : $\pm 1 \quad \pm 2$

Divisori del 1° COEFF. : $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$

Possibili zeri razionali: $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{2}{3} \quad \pm\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(1)=6+7+6+3-2\neq 0;$

$\mathrm{P}(-1)=6-7+6-3-2=0,\ \ OK$

$$\left(6a^4+7a^3+6a^2+3a-2\right):\underset{a-(-1)}{(a+1)} \qquad \begin{array}{r|rrrr|r} & 6 & 7 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & & -6 & -1 & -5 & 2 \\ \hline & 6 & 1 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$6a^4+7a^3+6a^2+3a-2=\underbrace{\left(6a^3+a^2+5a-2\right)}_{\substack{\text{e questo sarà ora}\\ \text{il nostro nuovo P}(a)}}(a+1)$$

A questo punto, per scomporre il nuovo polinomio $6a^3+a^2+5a-2$, che per comodità indicheremo ancora col simbolo $\mathrm{P}(a)$, ricorreremo ancora al metodo di Ruffini.
I possibili zeri razionali sono rimasti gli stessi di prima.
Segnaliamo però che, come si potrebbe dimostrare (vuoi pensarci su?), "i numeri con cui si è già tentato in precedenza senza successo non potranno andar bene nemmeno ora";
quindi, essendo inutile il calcolo di $\mathrm{P}(1)$, riprendiamo i nostri tentativi da $\mathrm{P}(-1)$:

$\mathrm{P}(-1)=-6+1-5-2\neq 0;\qquad \mathrm{P}(2)=48+4+10-2\neq 0;\qquad \mathrm{P}(-2)=-48+4-10-2\neq 0;$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{8}_4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-2\neq 0;\quad \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{8}_4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}-2\neq 0;\quad \mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\cancel{6}^2}{\cancel{27}_9}+\frac{1}{9}+\frac{5}{3}-2=0\ \ OK$

$$\left(6a^3+a^2+5a-2\right):\left(a-\frac{1}{3}\right) \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 6 & 1 & 5 & -2 \\ \frac{1}{3} & & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{6a^4+7a^3+6a^2+3a-2}=\left(6a^3+a^2+5a-2\right)(a+1)=$$

$$=\left(6a^2+3a+6\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)(a+1)=\cancel{3}\left(2a^2+a+2\right)\left(\frac{3a-1}{\cancel{3}}\right)(a+1)=\boxed{\left(2a^2+a+2\right)(3a-1)(a+1)}$$

c) Vogliamo infine fattorizzare $x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3$.

Qui ci troviamo di fronte a un polinomio IN DUE VARIABILI, OMOGENEO.
Se non ci fosse la seconda lettera, ossia la y, avremmo una situazione "standard" nella quale i numeri con cui "tentare" sarebbero $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$.
Invece c'è y come seconda lettera, e il polinomio è omogeneo.
Bene! Si tratterà semplicemente di comportarsi come se la variabile del polinomio fosse solo la x, e la y facesse invece parte dei coefficienti; e di effettuare i "tentativi" con i monomi $\pm y,\ \pm 2y,\ \pm 4y$.

$x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3=\mathrm{P}(x)$

$\mathrm{P}(y)\overset{\text{NOTA}}{=}y^3-3y^2\cdot y+4y\cdot y^2-4y^3=y^3-3y^3+4y^3-4y^3=-2y^3\neq 0;$

$\mathrm{P}(-y)=(-y)^3-3(-y)^2y+4(-y)y^2-4y^3=-y^3-3y^3-4y^3-4y^3=-12y^3\neq 0;$

$\mathrm{P}(2y)=(2y)^3-3(2y)^2\cdot y+4\cdot 2y\cdot y^2-4y^3=8y^3-12y^3+8y^3-4y^3=0\ \ OK$

$$\left(x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3\right):(x-2y) \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3y & 4y^2 & -4y^3 \\ 2y & & 2y & -2y^2 & 4y^3 \\ \hline & 1 & -y & 2y^2 & 0 \end{array}$$

$\left(x^3-3x^2y+4xy^2-4y^3\right)=\left(x^2-xy+2y^2\right)(x-2y)$

NOTA
*Il polinomio è pensato nella variabile x:
il simbolo* $\mathrm{P}(x)$ *indica proprio questo fatto.
In questo contesto, il simbolo* $\mathrm{P}(y)$ *viene invece ad indicare "ciò che si ottiene prendendo il polinomio* $\mathrm{P}(x)$ *e andando a sostituire y al posto della variabile x".*

Gli **ESERCIZI** sulle scomposizioni col metodo di Ruffini si trovano alla successiva **pagina 238**.