ESERCIZI (scomposizione col metodo di RUFFINI)

1) $x^3-6x^2+11x-6$ 2) $24x^3-26x^2+9x-1$ 3) y^3+2y^2-5y-6 4) $3a^3+2a^2+2a-1$
5) $t^4+10t^3+35t^2+50t+24$ 6) $4x^4-8x^3+9x^2-5x+1$ 7) x^3+3x-4 8) $a^5-4a^4+5a^3-a^2-2a+1$
9) $3w^3-5w^2-w+2$ 10) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ 11) $t^5-10t^4+35t^3-50t^2+24t$ 12) $c^5+c^4+4c^2$
13) $18x^3+21x^2+8x+1$ 14) $2a^3-4a^2-14a-8$ 15) $2b^3-5b^2+5b-3$ 16) $12z^3-72z^2+63z-15$
17) $x^3-x^2y-8xy^2+12y^3$ 18) $a^3-7ab^2+6b^3$ 19) $x^6+x^5y-x^4y^2-2x^3y^3-x^2y^4+xy^5+y^6$

RISULTATI

1) $(x-1)(x-2)(x-3)$ 2) $(2x-1)(3x-1)(4x-1)$ 3) $(y+1)(y-2)(y+3)$ 4) $(3a-1)(a^2+a+1)$
5) $(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)$ 6) $(2x-1)^2(x^2-x+1)$ 7) $(x-1)(x^2+x+4)$ 8) $(a-1)^3(a^2-a-1)$
9) $(3w-2)(w^2-w-1)$ 10) $(x+1)^2(x-2)^2$ 11) $t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$ 12) $c^2(c+2)(c^2-c+2)$
13) $(2x+1)(3x+1)^2$ 14) $2(a+1)^2(a-4)$ 15) $(2b-3)(b^2-b+1)$ 16) $3(z-5)(2z-1)^2$
17) $(x-2y)^2(x+3y)$ 18) $(a-b)(a-2b)(a+3b)$ 19) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)$

8. DIVISIBILITA'; FORMULE RELATIVE A UNA SOMMA O DIFFERENZA DI DUE POTENZE DI UGUAL GRADO

Il numero 44 ***NON E'* divisibile** per 7. Infatti 44 diviso 7 fa 6 **COL RESTO DI 2**.
Invece 91 ***E'* divisibile** per 7. Infatti 91 diviso 7 fa 13 **CON RESTO 0**.

Analogamente, dati due polinomi nella stessa variabile A(x) e B(x),
si dice che A(x) è divisibile per B(x) se e solo se la divisione A(x):B(x) ha come resto 0.

Insomma, l'aggettivo "divisibile", in matematica, significa sempre "divisibile con resto 0".

Supponiamo ora che il polinomio divisore sia un binomio della forma $(x-k)$;
in questa situazione il "Teorema del Resto", affermando che
il resto di una divisione della forma $\mathrm{P}(x):(x-k)$ è uguale a $\mathrm{P}(k)$, ci fornisce un vero e proprio
"Criterio di divisibilità":
il polinomio $\mathrm{P}(x)$ è divisibile per il binomio $(x-k)$ se e solo se $\mathrm{P}(k)=0$.

Osserviamo che la "divisibilità" porta con sé la "possibilità di fattorizzazione":
- poiché 91 è divisibile per 7, si può scrivere $91=7\cdot 13$
- e se un polinomio P(x) è divisibile per $(x-k)$, allora si potrà fattorizzare in $(x-k)\cdot(\textit{quoziente})$.

Ciò premesso, domandiamoci:

una differenza o una somma di due potenze di ugual grado
- **è o non è divisibile per la differenza delle basi?**
- **è o non è divisibile per la somma delle basi?**

Insomma:
i) a^n-b^n *è o non è divisibile per* $(a-b)$?
ii) a^n+b^n *è o non è divisibile per* $(a-b)$?
iii) a^n-b^n *è o non è divisibile per* $(a+b)$?
iv) a^n+b^n *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

Vediamo.

i) a^n-b^n *è o non è divisibile per* $(a-b)$?

Per rispondere, applicheremo il **"Criterio di divisibilità"**,
quindi penseremo il polinomio a^n-b^n come dipendente dalla variabile a,
e andremo a calcolare P(b), per verificare se è o non è uguale a zero.

$$a^n-b^n=\mathrm{P}(a)$$
$$\textit{Domanda}:\ a^n-b^n=\mathrm{P}(a)\ \textit{è o non è divisibile per}\ (a-b)?$$
$$\mathrm{P}(b)\underset{\text{NOTA}}{=}b^n-b^n=0,\quad \textit{quindi la risposta è}: SI'$$

Bene, abbiamo allora stabilito che

$$\boxed{a^n-b^n,\ \textit{qualunque sia}\ n,\ \textit{è sempre divisibile per}\ (a-b)}$$

NOTA: il polinomio P, ribadiamolo, è pensato nella variabile a: $\mathrm{P}=\mathrm{P}(a)$. Il simbolo P(b) indica dunque in questo contesto il numero che si ottiene sostituendo al posto della variabile (che è a), il numero b.

Ciò assicura che deve esistere una formula del tipo $a^n - b^n = (a-b)(.....)$
Cosa metteremo al posto dei puntini?
Ci metteremo il quoziente della divisione $\left(a^n - b^n\right):\left(a-b\right)$, da determinarsi con la regola di Ruffini.

	1	0	0	0	...	0	$-b^n$
b		b	b^2	b^3	...	b^{n-1}	b^n
	1	b	b^2	b^3	...	b^{n-1}	0

Quindi: $\boxed{a^n - b^n = \left(a-b\right)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}\right)}$

ii) $a^n + b^n$ *è o non è divisibile per* $(a-b)$?

$a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$

Domanda: $a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$ *è o non è divisibile per* $(a-b)$?

$\mathrm{P}(b) = b^n + b^n = 2b^n \neq 0,$ *quindi la risposta è*: *NO*

$\boxed{\begin{array}{l} a^n + b^n \textit{ non è mai divisibile per } (a-b); \\ \textit{non esiste alcuna fattorizzazione della forma } a^n + b^n = \left(a-b\right)\cdot\left(...\right) \end{array}}$

iii) $a^n - b^n$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

$a^n - b^n = \mathrm{P}(a)$

Domanda: $a^n - b^n = \mathrm{P}(a)$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

$$\mathrm{P}(-b) = \left(-b\right)^n - b^n = \left\langle \begin{array}{l} b^n - b^n = 0 \quad \textit{se } n \textit{ è PARI} \\ -b^n - b^n = -2b^n \neq 0 \quad \textit{se } n \textit{ è DISPARI} \end{array} \right. \quad \textit{e perciò}$$

$\boxed{a^n - b^n \textit{ è divisibile per } (a+b) \textit{ quando } n \textit{ è PARI, mentre NON lo è quando } n \textit{ è DISPARI}}$.

Nel caso di n PARI, esisterà dunque una formula del tipo $a^n - b^n = (a+b)(...)$ dove al posto dei $(...)$ andrà messo il quoziente della divisione $(a^n - b^n):(a+b)$, determinabile con la regola di Ruffini.

	1	0	0	0	...	0	$-b^n$
$-b$		$-b$	$+b^2$	$-b^3$	...	$-b^{n-1}$	$+b^n$
	1	$-b$ *esponente dispari, segno –*	$+b^2$	$-b^3$ *esponente dispari, segno –*	...	$-b^{n-1}$ *esp. dispari (n è pari!), segno –*	0

Quindi: $\boxed{\textit{con } n \textit{ PARI}, \; a^n - b^n = \left(a+b\right)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - b^{n-1}\right) \quad \left[\textit{segni alterni}\right]}$

iv) $a^n + b^n$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

$a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$

Domanda: $a^n + b^n = \mathrm{P}(a)$ *è o non è divisibile per* $(a+b)$?

$$\mathrm{P}(-b) = \left(-b\right)^n + b^n = \left\langle \begin{array}{l} b^n + b^n = 2b^n \neq 0 \quad \textit{se } n \textit{ è PARI} \\ -b^n + b^n = 0 \quad \textit{se } n \textit{ è DISPARI} \end{array} \right. \quad \textit{e perciò}$$

$\boxed{a^n + b^n \textit{ è divisibile per } (a+b) \textit{ quando } n \textit{ è DISPARI, mentre NON lo è quando } n \textit{ è PARI}}$

Nel caso di n DISPARI, esisterà dunque una formula $a^n + b^n = (a+b)(...)$ dove al posto dei puntini andrà messo il quoziente della divisione $(a^n + b^n):(a+b)$, determinabile con la regola di Ruffini.

	1	0	0	0	...	0	$+b^n$
$-b$		$-b$	$+b^2$	$-b^3$	...	$+b^{n-1}$	$-b^n$
	1	$-b$ *esponente dispari, segno –*	$+b^2$	$-b^3$ *esponente dispari, segno –*	...	$+b^{n-1}$ *+, perchè n–1 è pari in quanto n è dispari*	0

Quindi: $\boxed{\textit{con } n \textit{ DISPARI}, \; a^n + b^n = \left(a+b\right)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + b^{n-1}\right) \quad \left[\textit{segni alterni}\right]}$