

9. SCOMPOSIZIONI “A BLOCCHI”

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 + c^3 = \\
 & = (a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3) + c^3 = \\
 & = (a - 2b)^3 + c^3 = \\
 & = [(a - 2b) + c] \left[(a - 2b)^2 - (a - 2b) \cdot c + c^2 \right] = \\
 & = (a - 2b + c)(a^2 - 4ab + 4b^2 - ac + 2bc + c^2)
 \end{aligned}$$

Il polinomio $a - 2b$ è stato qui utilizzato come “blocco”.

Avremmo anche potuto, volendo, inserire dei passaggi intermedi, con la sostituzione $a - 2b = x$:

$$(a - 2b)^3 + c^3 = x^3 + c^3 = (x + c)(x^2 - x \cdot c + c^2)$$

Risostituendo a questo punto $a - 2b$ al posto di x , il gioco è fatto:

$$\begin{aligned}
 & [(a - 2b) + c] \left[(a - 2b)^2 - (a - 2b) \cdot c + c^2 \right] = \\
 & = (a - 2b + c)(a^2 - 4ab + 4b^2 - ac + 2bc + c^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & (x + y)^3 - (x - y)^3 = \\
 & = [(x + y) - (x - y)] \left[(x + y)^2 + (x + y)(x - y) + (x - y)^2 \right] = \\
 & = (\cancel{x} + y - \cancel{x} + y) \left(\cancel{x^2} + \cancel{2xy} + \cancel{y^2} + \cancel{x^2} - \cancel{xy} + \cancel{y^2} + \cancel{x^2} - \cancel{2xy} + \cancel{y^2} \right) = \\
 & = 2y(3x^2 + y^2)
 \end{aligned}$$

E' ovvio che avremmo potuto anche svolgere il calcolo “normalmente”, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 & (x + y)^3 - (x - y)^3 = \\
 & = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + \\
 & \quad - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) = \\
 & = \cancel{x^3} + 3x^2y + \cancel{3xy^2} + y^3 - \cancel{x^3} + 3x^2y - \cancel{3xy^2} + y^3 = \\
 & = 6x^2y + 2y^3 = 2y(3x^2 + y^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & (5x + 3)^4 - (x + 1)^4 = \\
 & = \left[(5x + 3)^2 + (x + 1)^2 \right] \left[(5x + 3)^2 - (x + 1)^2 \right] = \\
 & = \left[25x^2 + 30x + 9 + x^2 + 2x + 1 \right] (5x + 3 + x + 1)(5x + 3 - x - 1) = \\
 & = (26x^2 + 32x + 10)(6x + 4)(4x + 2) = \\
 & = 2(13x^2 + 16x + 5) \cdot 2(3x + 2) \cdot 2(2x + 1) = \\
 & = 8(13x^2 + 16x + 5)(3x + 2)(2x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & (a + b + c)^2 - 8(a + b + c) + 12 = \\
 & \underset{a+b+c=t}{=} t^2 - 8t + 12 = (t - 2)(t - 6) = \\
 & = (a + b + c - 2)(a + b + c - 6)
 \end{aligned}$$

Qui abbiamo ritenuto di effettuare *esplicitamente* la “posizione” intermedia $a + b + c = t$.

D'altra parte, i passaggi intermedi di questo tipo si possono tranquillamente saltare,

facendoli a mente

o comunque “trattando”, nella propria mente,

il polinomio $a + b + c$ come un “blocco” che viene manipolato come se si trattasse di una singola lettera.

$$\text{e)} \quad (a + b)^3 - (a + b)^2 + 2$$

Poniamo $a + b = t$ e avremo:

$$t^3 - t^2 + 2$$

che potremo scomporre con Ruffini.

$$P(t) = t^3 - t^2 + 2$$

$$P(-1) = -1 - 1 + 2 = 0, \quad \text{OK}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 (t^3 - t^2 + 2) : (t + 1) & 1 & -1 & 0 & 2 \\
 & -1 & & -1 & 2 \\
 \hline
 & 1 & -2 & 2 & 0
 \end{array}$$

$$t^3 - t^2 + 2 = (t^2 - 2t + 2)(t + 1)$$

Quindi, andando a risostituire $a + b$ al posto di t , la nostra scomposizione sarà

$$\left[(a + b)^2 - 2(a + b) + 2 \right] (a + b + 1) = (a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 2)(a + b + 1)$$

10. SCOMPOSIZIONI IN CUI OCCORRE RACCOGLIERE UN POLINOMIO

$$\text{a) } x^2 + 2x + 2y - y^2 = x^2 - y^2 + 2x + 2y = (x+y)(x-y) + 2(x+y) = (x+y)(x-y+2)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a^3 + b^3 + a^2 + b^2 + 2ab &= (a^3 + b^3) + (a^2 + b^2 + 2ab) = \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) + (a+b)^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2 + a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 8(x-3)(x-5)^2 - 10(x-3)^2(x-5) &= \\ &= 2(x-3)(x-5)[4(x-5) - 5(x-3)] = \\ &= 2(x-3)(x-5)[4x - 20 - 5x + 15] = \\ &= 2(x-3)(x-5)(-x-5) = \\ &= -2(x-3)(x-5)(x+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } a^3 - b^3 - a^2 - ab + 2b^2 &= (a^3 - b^3) - (a^2 + ab - 2b^2) = \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) - (a+2b)(a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2 - a - 2b) \end{aligned}$$

ESERCIZI (scomposizioni nelle quali un polinomio è utilizzato come un “blocco”,
o nelle quali occorre raccogliere un polinomio)

$$1) \quad a^3 + (b+c)^3$$

$$2) \quad x^3 - y^3 - 3y^2 - 3y - 1$$

$$3) \quad (a+b+c+1)^4 - (a+b+c+1)^2$$

$$4) \quad (x+y)^2 + 5(x+y) + 6$$

$$5) \quad (x+y)^2 + 2z(x+y) + z^2$$

$$6) \quad 4(a+b-c)^2 + 4(a+b-c) + 1$$

$$7) \quad (2a+b)^3 - (a+2b)^3$$

$$8) \quad 8(x-1)^3 + 27 = (2x-2)^3 + 27$$

$$9) \quad (x-5)^3 + (x-5)^2$$

$$10) \quad (x+y)^3(x-y) - (x+y)(x-y)^3$$

$$11) \quad (a+1)(a+2)(a+3) + (a+2)(a+3)(a+4)$$

$$12) \quad (a+b+1)^2 - 2a - 2b - 2$$

$$13) \quad x^2(x+1)(x+2) + x(x+1)^2(x+2) + x(x+1)(x+2)^2$$

$$14) \quad 4a^3(a-1)^3 + 6a^4(a-1)^2$$

$$15) \quad x^2 - y^2 + x + y$$

$$16) \quad a^2 - 3ab + 2b^2 - a + 2b$$

$$17) \quad w^4 + w^3 - w^2 - 2w - 1$$

$$18) \quad t^4 + t^3 + t^2 - 1$$

$$19) \quad ab^2 - 4a + 3b + 6$$

$$20) \quad x^3 - x^2 + y^2 - y^3$$

RISULTATI

$$1) \quad (a+b+c)(a^2 - ab - ac + b^2 + 2bc + c^2)$$

$$2) \quad (x-y-1)(x^2 + xy + x + y^2 + 2y + 1)$$

$$3) \quad (a+b+c+1)^2(a+b+c+2)(a+b+c)$$

$$4) \quad (x+y+2)(x+y+3)$$

$$5) \quad (x+y+z)^2$$

$$6) \quad (2a+2b-2c+1)^2$$

$$7) \quad (a-b)(7a^2 + 13ab + 7b^2)$$

$$8) \quad (2x+1)(4x^2 - 14x + 19)$$

$$9) \quad (x-5)^2(x-4)$$

$$10) \quad 4xy(x+y)(x-y)$$

$$11) \quad (a+2)(a+3)(2a+5)$$

$$12) \quad (a+b+1)(a+b-1)$$

$$13) \quad 3x(x+1)^2(x+2)$$

$$14) \quad 2a^3(a-1)^2(5a-2)$$

$$15) \quad (x+y)(x-y+1)$$

$$16) \quad (a-2b)(a-b-1)$$

$$17) \quad (w+1)(w^3 - w - 1)$$

$$18) \quad (t+1)(t^3 + t - 1)$$

$$19) \quad (b+2)(ab - 2a + 3)$$

$$20) \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2 - x - y)$$