

FRAZIONI ALGEBRICHE

Si dice “frazione algebrica” una frazione i cui termini siano monomi o polinomi.

Esempi: $\frac{15x^3y}{20x^4y^4}$ $\frac{a+b}{cd}$ $\frac{x^2-1}{xy-x-y+1}$ $\frac{3}{k-2}$

1. SEMPLIFICAZIONE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

A volte (non sempre) una frazione algebrica può essere semplificata.

La semplificazione di una frazione consiste nell'applicare la cosiddetta “**proprietà invariante**”, che dice:

“In una divisione è possibile moltiplicare oppure dividere (nel caso della semplificazione: dividere) per uno stesso numero diverso da zero, sia il dividendo che il divisore e il risultato dell'operazione non cambierà”

Notiamo che in molte semplificazioni si applica anche, *simultaneamente*, la proprietà che afferma:

“Quando si deve moltiplicare, o dividere (nel nostro caso: dividere), un PRODOTTO per un numero, basta moltiplicare, o dividere, per quel numero UNO SOLO dei fattori del prodotto. In particolare, quando si deve dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere quel fattore”

Esempi: $\frac{\cancel{2}^3}{\cancel{4}^5} = \frac{3}{5}$ $\frac{25 \cdot \cancel{4}^2}{\cancel{2}^3 \cdot 11} = \frac{50}{33}$ $\frac{5 \cdot 3 \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot 29} = \frac{15}{29}$

A) SEMPLIFICAZIONE MONOMIO-CON-MONOMIO

1) $\frac{15x^3y}{20x^4y^4} = \frac{\cancel{5}^3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y}}{\cancel{4}^2 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{3}{4xy^3}$ Ovviamente, nella pratica, il passaggio intermedio si salta, come negli esempi successivi.

2) $\frac{a^{\cancel{2}} \cancel{b}^{\cancel{2}} \cancel{c}^{\cancel{2}} \cancel{d}^{\cancel{2}} e^{\cancel{3}}}{\cancel{a}^{\cancel{2}} \cancel{b}^{\cancel{2}} \cancel{c}^{\cancel{2}} \cancel{d}^{\cancel{2}} \cancel{e}^{\cancel{3}} f^4} = \frac{ae^3}{cd^3f^4}$ 3) $\frac{\cancel{6} x^{\cancel{2}}}{3 \cdot \cancel{18} x^{\cancel{10}} 8} = \frac{1}{3x^8}$ 4) $\frac{\cancel{7} x^{\cancel{4}}}{\cancel{7} \cancel{x}} = x^4$

B) SEMPLIFICAZIONE MONOMIO-CON-POLINOMIO

In questo caso la semplificazione è possibile soltanto se nel polinomio si può raccogliere un fattore, che sia poi semplificabile col monomio che sta dall'altra parte della linea di frazione.

5) $\frac{5a^2+15a}{35a^2b} = \frac{\cancel{5}^1 \cancel{a} (a+3)}{7 \cdot \cancel{5}^1 a^{\cancel{2}} b} = \frac{a+3}{7ab}$

ATTENZIONE!!! A questo punto l'esercizio 5) è finito: semplificare le “a” sarebbe un ERRORACCIO!



$\frac{\cancel{a}+3}{7\cancel{a}b}$
WHAAAH
!!!

MA COSA FAI,



DISGRAZIATO???

IMPORTANTISSIMO: IN UNA FRAZIONE, E' ERRORE MADORNALE

SEMPLIFICARE ADDENDO CON ADDENDO OPPURE ADDENDO CON FATTORE:

SI PUO' SOLO SEMPLIFICARE FATTORE CON FATTORE.

Per capire bene questo fatto, basterà pensare a qualche caso puramente numerico. Due esempi:

♪ la frazione $\frac{10+4}{15} = \frac{14}{15}$, se noi facessimo l'**ERRORACCIO** di semplificare 10 con 15, diventerebbe $\frac{\cancel{10}+4}{\cancel{15}_3} = \frac{6}{3} = 2$!!!

♪ di fronte alla frazione $\frac{9+5}{7+6} = \frac{14}{13}$, prova a semplificare (WHAAAH!!!) il 9 col 6, e osserva che **DISASTRO!!!**

Ancora un'osservazione. L'esercizio (tanto per fare un esempio) $\frac{5x+10}{15}$ si può svolgere in **2 modi**:

a) raccogliendo e poi semplificando: $\frac{5x+10}{15} = \frac{\cancel{5}(x+2)}{\cancel{15}_3}$

b) ... oppure direttamente, come qui a destra. Abbiamo diviso per 5 sia “sopra” che “sotto”: ma **PER DIVIDERE UNA SOMMA PER UN NUMERO OCCORRE DIVIDERE PER QUEL NUMERO TUTTI GLI ADDENDI DELLA SOMMA**

$\frac{\cancel{5}x + \cancel{10}^2}{\cancel{15}_3}$

C) SEMPLIFICAZIONE POLINOMIO-CON-POLINOMIO

In questo caso occorre innanzitutto **SCOMPORRE IN FATTORI** (se possibile) i due polinomi: dopodiché, si semplificherà **FATTORE CON FATTORE** (s'intende che i **FATTORI** siano "TOTALI").

$$6) \frac{x^2-1}{xy-x-y+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(y-1)-(y-1)} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(y-1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{y-1}$$

$$7) \frac{t^4+3t^3+3t^2+t}{t^2+5t+4} = \frac{t(t^3+3t^2+3t+1)}{(t+1)(t+4)} = \frac{t\cancel{(t+1)}^3}{\cancel{(t+1)}(t+4)} = \frac{t(t+1)^2}{t+4}$$

$$8) \frac{x^5-9x^4+18x^3}{x^5-9x^3} = \frac{x^3(x^2-9x+18)}{x^3(x^2-9)} = \frac{\cancel{(x-3)}(x-6)}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{x-6}{x+3} \text{ (NOTA)}$$



NOTA
Insisto!
Arrivati a

$$\frac{x-6}{x+3},$$

l'esercizio è **TERMINATO!**

Sarebbe **ERRORACCIO**

semplificare

la x con la x ,

o il 3 col -6 !!!

**ATTEN-
ZIONE!**

Professore ...
guardi ...



Mi spiace, ma HAI SBAGLIATO.

Quando si dice "fattore con fattore" si deve intendere "FATTORE TOTALE CON FATTORE TOTALE", mentre l' $(x+2)$ a numeratore è soltanto un fattore **PARZIALE**.

Avresti dovuto PRIMA terminare la scomposizione e POI semplificare!

$$\frac{x^3+2x^2+4x+8}{3x+6} = \frac{x^2\cancel{(x+2)}+4(x+2)}{3\cancel{(x+2)}}$$

ho fatto giusto, vero?

Ho semplificato, come dice lei,
"fattore con fattore" ...

$$\frac{x^3+2x^2+4x+8}{3x+6} = \frac{x^2(x+2)+4(x+2)}{3(x+2)} = \frac{\cancel{(x+2)}(x^2+4)}{3\cancel{(x+2)}} \text{ ADESSO E' GIUSTO!!!}$$

ESERCIZI (semplificazione di frazioni algebriche)

- 1) $\frac{12a^4b^4c^4}{18ab^4c^{12}}$ 2) $\frac{42x^7}{14x^6}$ 3) $\frac{29r^3}{58r^6}$ 4) $\frac{y^3}{y^3}$ 5) $\frac{\ell^4}{\ell^5}$ 6) $\frac{k^7}{k^4}$ 7) $\frac{15x^2y^4}{18xy^{10}}$ 8) $\frac{a}{-ax}$
- 9) $\frac{6x^6-18x^5}{15x^4}$ 10) $\frac{4a+4b+4c}{12}$ 11) $\frac{x^3+x^2}{x^5}$ 12) $\frac{3x^2}{6x^5+9x^4+12x^3}$ 13) $\frac{5a-5b}{5}$ 14) $\frac{6}{3x+3}$
- 15) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$ 16) $\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+xy}$ 17) $\frac{3a-12}{a^2-9a+20}$ 18) $\frac{3x^3-2x^2+6x-4}{9x^2-4}$
- 19) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$ 20) $\frac{a^3-a^2-4a+4}{a^2-3a+2}$ 21) $\frac{a^5+a^4b+a^4c}{a^5+a^4b}$ 22) $\frac{6n^2-5n+1}{2n^3-n^2-4n+2}$
- 23) $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$ 24) $\frac{4a^2+12a+5}{2a^2+11a+5}$ 25) $\frac{x^4-10x^2+9}{x^2+4x+3}$ 26) $\frac{x+y+1}{x^2+y^2+2xy-1}$
- 27) $\frac{a^2+7ac+12c^2}{a^2+6ac+9c^2}$ 28) $\frac{x^2y+axy+ax+a^2}{x^2+3ax+2a^2}$ 29) $\frac{a^2-ab-6b^2}{a^4-8b^4}$ 30) $\frac{(a+b)^3+(a+b)^2}{a+b+1}$
- 31) $\frac{k^3-8}{k^2-4}$ 32) $\frac{x^3-x}{x^3-1}$ 33) $\frac{3x^3-x^2-x-1}{2x^2-x-1}$ *Ruffini, per il numeratore!* 34) $\frac{a^2-a-2}{a^3+2a^2-1}$ *Ruffini, per il denominatore!*

RISULTATI

- 1) $\frac{2a^3}{3c^8}$ 2) $3x$ 3) $\frac{1}{2r^3}$ 4) 1 5) $\frac{1}{\ell}$ 6) k^3 7) $\frac{5x}{6y^6}$ 8) $-\frac{1}{x}$
- 9) $\frac{2x(x-3)}{5}$ 10) $\frac{a+b+c}{3}$ 11) $\frac{x+1}{x^3}$ 12) $\frac{1}{x(2x^2+3x+4)}$ 13) $a-b$ 14) $\frac{2}{x+1}$ 15) $\frac{a+b}{a-b}$
- 16) $\frac{(x+y)^2}{x}$ 17) $\frac{3}{a-5}$ 18) $\frac{x^2+2}{3x+2}$ 19) $\frac{x-2}{x-4}$ 20) $a+2$ 21) $\frac{a+b+c}{a+b}$ 22) $\frac{3n-1}{n^2-2}$ 23) *Non semplificabile*
- 24) $\frac{2a+5}{a+5}$ 25) $(x-1)(x-3)$ 26) $\frac{1}{x+y-1}$ 27) $\frac{a+4c}{a+3c}$ 28) $\frac{xy+a}{x+2a}$ 29) $\frac{a+2b}{(a^2+9b^2)(a+3b)}$
- 30) $(a+b)^2$ 31) $\frac{k^2+2k+4}{k+2}$ 32) $\frac{x(x+1)}{x^2+x+1}$ 33) $\frac{3x^2+2x+1}{2x+1}$ 34) $\frac{a-2}{a^2+a-1}$