

3. POLINOMI OPPOSTI

Due polinomi sono detti “**opposti**” quando i termini dell’uno sono gli opposti dei termini dell’altro.

Esempi:

$$\boxed{a-5} \quad e \quad \boxed{-a+5}$$

(per eleganza, si scrive preferibilmente $\boxed{5-a}$ anziché $-a+5$)

$$\boxed{3x^2 - xy + y^2} \quad e \quad \boxed{-3x^2 + xy - y^2}$$

Due polinomi opposti esprimono numeri opposti, nel senso che, se si prendono due polinomi opposti, e alla lettera (o alle lettere) si attribuisce, nei due polinomi, lo stesso valore, si ottengono due risultati opposti.

	$\boxed{a-5}$	$\boxed{-a+5}$
$a=2$	-3	+3
$a=0$	-5	+5
$a=9$	4	-4
$a=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-5=-\frac{11}{2}$	$+\frac{1}{2}+5=+\frac{11}{2}$

D'altronde, mettendo in evidenza il segno $-$, abbiamo:

$$-a+5 = -(a-5)$$

ossia : il numero $-a+5$ è l'opposto del numero $a-5$

E analogamente:

$$-3x^2 + xy - y^2 = -(3x^2 - xy + y^2)$$

- Il **rapporto** (= **quoziente**) fra due polinomi opposti vale sempre -1 , perché il rapporto fra due numeri opposti vale sempre -1 ; d'altronde, mettendo in evidenza il segno $-$, si ottiene:

$$\frac{-a+5}{a-5} = \frac{-\cancel{(a-5)}}{\cancel{a-5}} = -1 \quad \frac{a-5}{-a+5} = \frac{-\cancel{(-a+5)}}{\cancel{-a+5}} = -1$$

- Invece la **somma algebrica** di due polinomi opposti vale 0 , perché la somma algebrica fra due numeri opposti vale, appunto, 0 , e d'altronde:
- $$(-a+5) + (a-5) = \cancel{-a+5} + \cancel{a-5} = 0$$

- Il **prodotto** di due polinomi opposti è uguale all'opposto del quadrato di uno qualsiasi di essi:
- $$(-a+5)(a-5) = -(a-5)(a-5) = -(a-5)^2 = -(-a+5)^2$$

- Se si prendono due numeri opposti e li si eleva allo stesso esponente **PARI**, i risultati saranno **UGUALI**:

$$(+5)^2 = +25$$

$$(-5)^2 = +25$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$$

- ... e invece se si prendono due numeri opposti e li si eleva allo stesso esponente **DISPARI**, i risultati saranno **OPPOSTI**:

$$(+5)^3 = +125$$

$$(-5)^3 = -125$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^5 = +\frac{1}{32}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

Coi polinomi, tutto ciò si traduce in **IMPORTANTISSIME IDENTITÀ** come le seguenti:

$$\begin{aligned} (-a+5)^2 &= (a-5)^2 \\ (-a+5)^3 &= -(a-5)^3 \\ (-a+5)^4 &= (a-5)^4 \\ (-a+5)^5 &= -(a-5)^5 \end{aligned}$$

perché, in dettaglio, $\begin{aligned} (-a+5)^2 &= [-(a-5)]^2 = +(a-5)^2 \\ &" \quad (-a+5)^3 = [-(a-5)]^3 = -(a-5)^3 \\ &" \quad (-a+5)^4 = [-(a-5)]^4 = +(a-5)^4 \\ &" \quad (-a+5)^5 = [-(a-5)]^5 = -(a-5)^5 \end{aligned}$

Possiamo anche dire così (IMPORTANTE!):

- ♥ quando un polinomio è elevato ad esponente **PARI**, è possibile cambiare i segni di tutti i termini e il valore del risultato non cambierà;

- ♥ quando un polinomio è elevato ad esponente **DISPARI**, se cambiamo i segni di tutti i termini il risultato si muterebbe nell'opposto, quindi per ripristinare l'uguaglianza occorre scrivere un segno “ $-$ ” davanti.



$$\begin{aligned} (7-x)^2 &= (x-7)^2 \\ (7-x)^3 &= -(x-7)^3 \end{aligned}$$

COME FARE LE SEMPLIFICAZIONI QUANDO COMPAAIONO POLINOMI OPPOSTI

$$1) \frac{9-x^2}{x^2-5x+6} = \frac{(3+x)(3-x)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x+3)[-(x-3)]}{(x-2)(x-3)} = \frac{-(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = -\frac{x+3}{x-2}$$

o anche, direttamente: $\frac{9-x^2}{x^2-5x+6}$ dato che il quoziente di due polinomi opposti vale -1

$$= \frac{(3+x)\cancel{(3-x)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = -\frac{x+3}{x-2} \quad \heartsuit$$

Volendo, si poteva pure procedere così: $\frac{9-x^2}{x^2-5x+6} = \frac{-(x^2-9)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = -\frac{x+3}{x-2}$

$$2) \frac{(2a-b)\cancel{(-a-b+c)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{(b-a)}\cancel{(a+b-c)}(a-3b)} = \frac{2a-b}{a-3b}$$

$$3) \frac{y^2-3y+2}{(1-y)^2} = \frac{(y-1)(y-2)}{(1-y)^2} = \begin{cases} \text{(NOTA 1)} \quad \frac{\cancel{(y-1)}(y-2)}{(y-1)^2} = \frac{y-2}{y-1} \\ \frac{-(1-y)(y-2)}{(1-y)^2} = -\frac{y-2}{1-y} \quad \text{(NOTA 2)} \quad \frac{y-2}{-(1-y)} = \frac{y-2}{y-1} \end{cases}$$

NOTA 1 Come osservato, due polinomi opposti elevati al quadrato danno lo stesso risultato:
 $(1-y)^2 = (y-1)^2$

NOTA 2 $\heartsuit \quad -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ perché

$$\frac{a}{-b} = \frac{a}{-1 \cdot b} = \frac{1}{-1} \cdot \frac{a}{b} = -1 \cdot \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{-1 \cdot a}{b} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{a}{b} = -1 \cdot \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$4) \frac{(x^2+x-1)^5}{(1-x-x^2)^4} = \begin{cases} \frac{(x^2+x-1)^5}{(x^2+x-1)^4} = x^2+x-1 \\ \frac{-(1-x-x^2)^5}{(1-x-x^2)^4} = -(1-x-x^2) = x^2+x-1 \end{cases}$$

$\heartsuit$ Tieni anche presente che
in una frazione è lecito
cambiare i segni
sia "sopra" che "sotto",
perché in tal modo
il valore della frazione non muta:

$$\frac{4}{5} = \frac{-4}{-5}, \quad \frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}, \quad \frac{3-x}{2-x} = \frac{x-3}{x-2}$$

ESERCIZI (semplificazioni con polinomi opposti)

$$1) \frac{4(3x-2)}{2-3x} \quad 2) \frac{(-a-1)(a-5)}{(a+1)(a-4)} \quad 3) \frac{(x-y+t)(x+y+t)}{(x-y-t)(y-t-x)} \quad 4) \frac{1-x^2}{xy-x-y+1} \quad 5) \frac{a+b}{b+a}$$

$$6) \frac{(a-b)^8}{(b-a)^6} \quad 7) \frac{(b-a)^{11}}{(a-b)^4} \quad 8) \frac{2y-1}{3y-1} \cdot \frac{1-3y}{y(1-2y)} \quad 9) \frac{(2a-5)^3}{a-3} \cdot \frac{3-a}{(5-2a)^2} \quad 10) \frac{(n^2-1)^3}{(1-n)^2}$$

$$11) \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad 12) \frac{(1-x)(2-x)}{(x-1)(x-2)} \quad 13) (a-b)^5(b-a)^4(b-a)^3$$

RISULTATI

$$1) -4 \quad 2) -\frac{a-5}{a-4} = \frac{5-a}{a-4} = \frac{a-5}{4-a} \quad 3) -\frac{x+y+t}{x-y-t} = \frac{x+y+t}{y+t-x} \quad 4) -\frac{x+1}{y-1} = \frac{1+x}{1-y} \quad 5) 1 \quad 6) (a-b)^2$$

$$7) -(a-b)^7 = (b-a)^7 \quad 8) \frac{1}{y} \quad 9) -(2a-5) = 5-2a \quad 10) (n-1)(n+1)^3 \quad 11) -1 \quad 12) 1 \quad 13) -(a-b)^{12}$$