

## 4. SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Quando i denominatori sono **NUMERI**,  
si fa esattamente come con le normali frazioni numeriche:

- A) si scrive, come denominatore comune, il minimo comune multiplo (m.c.m.) dei denominatori  
B) si divide il denominatore comune per ciascun denominatore, e si moltiplica per “ciò che sta sopra”.

$$1) \frac{11x+4}{15} + \frac{x}{10} = \frac{2(11x+4)+3x}{30} = \frac{22x+8+3x}{30} = \frac{25x+8}{30}$$

$$2) \frac{a+2}{6} - \frac{5a+1}{9} + \frac{2a}{3} = \frac{3(a+2) - 2(5a+1) + 6 \cdot 2a}{18} = \frac{3a+6-10a-2+12a}{18} = \frac{5a+4}{18}$$

$$3) \text{ **IMPORTANTE!** } \frac{2x+1}{7} - \frac{x+4}{14} = \frac{2(2x+1) - (x+4)}{14} = \frac{4x+2-x-4}{14} = \frac{3x-2}{14}$$

Qui il segno – si riferisce a “**TUTTO**” il polinomio  $x+4$ ,  
che quindi va scritto tra parentesi.  
Ciò si tradurrà poi in un **DOPPIO CAMBIAMENTO DI SEGNO**.

Quando i denominatori sono **MONOMI**,  
il minimo comun denominatore si ottiene prendendo:

- il m.c.m. dei coefficienti
- **TUTTE** le lettere, **COMUNI E NON COMUNI**,  
ciascuna **UNA SOLA VOLTA** e con l'esponente più **ALTO**.

$$4) \frac{2a+b}{6a^3} - \frac{a+3b}{9a^2b} + \frac{2}{b^2} = \frac{3b^2(2a+b) - 2ab(a+3b) + 18a^3 \cdot 2}{18a^3b^2} =$$

$$= \frac{\cancel{6ab^2} + 3b^3 - 2a^2b - \cancel{6ab^2} + 36a^3}{18a^3b^2} = \frac{36a^3 - 2a^2b + 3b^3}{18a^3b^2}$$

$$5) \frac{y}{6x^4} - \frac{7}{4x^2y^2} = \frac{2y^2 \cdot y - 7 \cdot 3x^2}{12x^4y^2} = \frac{2y^3 - 21x^2}{12x^4y^2}$$

6) **IMPORTANTE!**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x-2}{x^3} = \frac{x^2+x - (x-2)}{x^3} = \frac{x^2 \cancel{-x} \cancel{+x} + 2}{x^3} = \frac{x^2+2}{x^3}$$

♥ Si capisce che il m.c.d.  
costruito tramite questa regola  
è la **più semplice espressione**  
che possa essere poi  
comodamente divisa per ciascuno  
dei denominatori di partenza ...  
proprio ciò di cui si ha bisogno  
nel procedimento.

Analogamente all'esempio 3),  
anche in questo numero 6)  
il segno – si riferisce a “**TUTTO**” il  
polinomio  $x-2$ , che quindi va scritto  
(o comunque pensato) tra parentesi.  
Ciò si traduce in un **DOPPIO**  
**CAMBIAMENTO DI SEGNO**

Quando i denominatori sono **POLINOMI**,  
**PRIMA DI TUTTO LI SI DEVE SCOMPORRE IN FATTORI!**  
il minimo comun denominatore si otterrà poi con una regola  
del tutto analoga a quella sopra enunciata per i monomi.

$$7) \frac{a^2}{6a^3+18a^2+18a+6} + \frac{a+2}{4a^2+8a+4} =$$

$$= \frac{a^2}{6(a^3+3a^2+3a+1)} + \frac{a+2}{4(a^2+2a+1)} =$$

$$= \frac{a^2}{6(a+1)^3} + \frac{a+2}{4(a+1)^2} = \frac{2a^2+3(a+1)(a+2)}{12(a+1)^3} =$$

$$= \frac{2a^2+3(a^2+2a+a+2)}{12(a+1)^3} = \frac{2a^2+3a^2+6a+3a+6}{12(a+1)^3} = \frac{5a^2+9a+6}{12(a+1)^3}$$

### APPROFONDIMENTO

*Tutto* il discorso delle frazioni  
algebriche richiederebbe  
riflessioni  
ad un livello più avanzato  
per tener conto del fatto che,  
mentre nelle frazioni “ordinarie”  
numeratore e denominatore  
sono numeri interi, qui le lettere  
possono assumere anche valori  
frazionari o irrazionali.  
Un'analisi paziente,  
ma troppo “specialistica” per  
poter rientrare in questo corso,  
mostrerebbe che le regole da noi  
enunciate sono effettivamente  
valide anche in questo ambito  
più generale.

$$\begin{aligned}
 8) \quad \frac{x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \\
 &= \frac{x(x-1) - (x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - 2x - 1 + \cancel{x^2} - 2x + 1}{(x+1)(x-1)^2} = \\
 &= \frac{x^2 - 5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x(x-5)}{(x+1)(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

9) **IMPORTANTE!**

Qui ritroviamo la solita particolarità del segno – che si riferisce a **TUTTO** un polinomio.

$$\begin{aligned}
 \frac{3b+4}{b-1} - \frac{4b+3}{b(b-1)} &= \frac{b(3b+4) - (4b+3)}{b(b-1)} = \frac{3b^2 + 4b - 4b - 3}{b(b-1)} = \\
 &= \frac{3b^2 - 3}{b(b-1)} = \frac{3(b^2 - 1)}{b(b-1)} = \frac{3(b+1)(\cancel{b-1})}{b(\cancel{b-1})} = \frac{3(b+1)}{b}
 \end{aligned}$$

$$10) \quad \frac{x+4}{x+3} - \frac{x}{x+6} = \frac{(x+6)(x+4) - x(x+3)}{(x+3)(x+6)} = \frac{\cancel{x^2} + 4x + 6x + 24 - \cancel{x^2} - 3x}{(x+3)(x+6)} = \frac{7x+24}{(x+3)(x+6)}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} + \frac{4ab}{a^2-b^2} &= \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} + \frac{4ab}{(a+b)(a-b)} = \\
 &= \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2 + 4ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{\cancel{a^2} - 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} - 2ab - \cancel{b^2} + 4ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{0}{(a+b)(a-b)} = 0
 \end{aligned}$$

12) **IMPORTANTE!**

Anche nell'espressione seguente compare la particolarità del segno – riferito ad un polinomio.

$$\begin{aligned}
 \frac{x+3}{x^2-3x+2} - \frac{x+2}{x^2-4x+3} - \frac{1}{x^2-5x+6} &= \\
 &= \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \\
 &= \frac{(x-3)(x+3) - (x-2)(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\
 &= \frac{\cancel{x^2} - 9 - \cancel{x^2} + 4 - x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)} = -\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad \frac{1}{4n^2-2n} + \frac{1}{n^3-2n^2+n} - \frac{1}{4n^3-6n^2+2n} &= \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n^2-2n+1)} - \frac{1}{2n(2n^2-3n+1)} = \\
 &= \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n(2n^2-2n-n+1)} = \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n[2n(n-1)-(n-1)]} = \\
 &= \frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{1}{2n(n-1)(2n-1)} = \frac{(n-1)^2 + 2(2n-1) - (n-1)}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \\
 &= \frac{n^2 - 2n + 1 + 4n - 2 - n + 1}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{2n(2n-1)(n-1)^2} = \frac{\cancel{n}(n+1)}{2\cancel{n}(2n-1)(n-1)^2} = \frac{n+1}{2(2n-1)(n-1)^2}
 \end{aligned}$$

- 1)  $\frac{a+b}{8} + \frac{a-b}{6}$       2)  $\frac{x+1}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x-1}{2}$       3)  $4x - \frac{x+3}{3} + \frac{x+2}{2}$       4)  $\frac{n}{5} - \frac{n+3}{10}$
- 5)  $\frac{x-1}{x^3} - \frac{5x^2+1}{6x^4} + \frac{3}{4x^2}$       6)  $\frac{a}{15c} + \frac{b+1}{10c^2}$       7)  $\frac{a+3}{a^2} - \frac{1}{a}$       8)  $\frac{3}{x} + \frac{2x+1}{x^2} - \frac{4x^2+x-1}{x^3}$
- 9)  $\frac{5}{4ax} - \frac{a-1}{3a^2}$       10)  $\frac{1}{xy} + \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$       11)  $\frac{a+b}{12a^2b^2} - \frac{a-b}{15a^3b} + \frac{2a}{b^4}$       12)  $\frac{x+1}{x} - \frac{x^2+x+1}{x^2}$
- 13)  $\frac{2}{a^2b} - \frac{a-b}{ab^3} - \frac{a+b}{a^2b^2}$       14)  $\frac{1}{2t} - \frac{1-4t^2}{8t^3}$       15)  $\frac{a}{5} - \frac{2}{a}$       16)  $\frac{b}{2} + \frac{2}{b} + \frac{1}{2b} + 2b$
- 17)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1$       18)  $k + \frac{1}{k}$       19)  $\frac{r+1}{r} - r - 1$       20)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$
- 21)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$       22)  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}$       23)  $1 + \frac{a+b}{a}$       24)  $1 - \frac{a+b}{a}$
- 25)  $\frac{y}{12x^2} - \frac{x^2+2y^2}{18xy^2}$       26)  $a+2 - \frac{4}{b}$       27)  $\frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab}$       28)  $a + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2}$
- 29)  $\frac{1}{2a} + \frac{a+1}{2a^2} - \frac{a+2}{2a^3}$       30)  $\frac{2x+1}{4x} - \frac{3x-1}{6x}$       31)  $\frac{a+1}{a} + \frac{a-1}{a}$       32)  $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a}$
- 33)  $a^{-1} + a^{-2} + a^{-3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = \dots$       34)  $(3x)^{-2} + 3x^{-2} = \frac{1}{(3x)^2} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} = \dots$       35)  $a^2 + a + 1 + a^{-1} + a^{-2}$
- 36)  $3c^{-3} - 2c^{-2}$       37)  $\frac{x-2}{3x^2-3} + \frac{x}{2x^2-4x+2}$       38)  $\frac{b^2}{b^2-6b+9} - \frac{b+1}{b-3}$       39)  $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a-1}$
- 40)  $\frac{1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2} - \frac{x-1}{x^6+2x^5+x^4}$       41)  $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} + \frac{4xy}{x^2-y^2}$       42)  $\frac{5}{t+2} - \frac{t+1}{t^2+5t+6}$
- 43)  $\frac{x+y}{6x-6y} - \frac{x^2+y^2}{4x^2+4y^2-8xy}$       44)  $\frac{1}{y+3} - \frac{2y-7}{y^2-9}$       45)  $\frac{a}{3a+2} + \frac{7a+2}{9a^2-4}$
- 46)  $\frac{1}{2a^2-4a+2} - \frac{a+1}{a^3-a^2+2a-2}$       47)  $\frac{3}{q} + \frac{q}{q+1}$       48)  $\frac{6h}{3h+5} + \frac{10}{3h+5}$
- 49)  $\frac{1}{(a+b+c)^3} - \frac{a-b+c}{(a+b+c)^4}$       50)  $\frac{a+b}{a-b} + 2$       51)  $\frac{a+b}{a-b} - 1$       52)  $\frac{2a+1}{a^2-3a+2} + \frac{a+2}{2a^2-3a+1}$
- 53)  $\frac{a-x}{ax^2+x^3} + \frac{1}{a^2+2ax+x^2}$       54)  $\frac{y+4}{y^2-7y+12} - \frac{y-3}{y^2-16}$       55)  $\frac{x+y}{2x-2y} + \frac{x-y}{2x+2y}$
- 56)  $\frac{x}{x^3+x^2+x+1} - \frac{1}{x^4+2x^2+1}$       57)  $\frac{1}{r+s+1} - \frac{1}{r+s}$       58)  $\frac{2}{w+3} - \frac{1}{w+2}$
- 59)  $\frac{x+y}{x^2y+xy^2-12y^3} - \frac{x-3y}{x^2y+8xy^2+16y^3}$       60)  $\frac{2t^2}{(t+2)^3} - \frac{t}{(t+2)^2} - \frac{1}{t+2}$       61)  $\frac{1}{2t^2-5t+2} - \frac{1}{4t^2-1}$
- 62)  $\frac{3}{x-y} + x+y$       63)  $a+7 - \frac{a^2}{a+7}$       64)  $-\frac{a+b-1}{a+b} + 1$       65)  $\frac{1-2c}{1-c} - \frac{2-c^2}{1-c^2} - 1$
- 66)  $\frac{2a}{a^2-5a+6} - \frac{7a+6}{a^3-2a^2-9a+18} - \frac{a-2}{a^2-9}$       67)  $\frac{2}{n^2-3n+2} - \frac{n}{n^3-n^2-4n+4} - \frac{n}{n^4-5n^2+4}$
- 68)  $\frac{5}{k^2-9k+18} - \frac{k-3}{k^2-6k} - \frac{10k^2-k^3-18}{k^4-9k^3+18k^2}$       69)  $\frac{1}{x^3-6x^2+11x-6} - \frac{1}{x^3+4x^2+x-6}$       *Scomposizioni con Ruffini*
- 70)  $\frac{1}{a^3-a^2-a-2} - \frac{1}{a^3-1}$       *Ruffini*      71)  $\frac{3y}{2y^3+7y^2+7y+2} - \frac{5}{4y^2+6y+2}$       *Ruffini*

## RISULTATI

- 1)  $\frac{7a-b}{24}$       2)  $\frac{7x-3}{12}$       3)  $\frac{25x}{6} = \frac{25}{6}x$       4)  $\frac{n-3}{10}$
- 5)  $\frac{11x^2-12x-2}{12x^4}$       6)  $\frac{2ac+3b+3}{30c^2}$       7)  $\frac{3}{a^2}$       8)  $\frac{x^2+1}{x^3}$
- 9)  $\frac{15a-4ax+4x}{12a^2x}$       10)  $\frac{1+2y+3x}{xy}$       11)  $\frac{120a^4+5a^2b^2+ab^3+4b^4}{60a^3b^4}$       12)  $-\frac{1}{x^2}$
- 13)  $\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}$       14)  $\frac{8t^2-1}{8t^3}$       15)  $\frac{a^2-10}{5a}$       16)  $\frac{5b^2+5}{2b}$
- 17)  $\frac{x^2+y^2+xy}{xy}$       18)  $\frac{k^2+1}{k}$       19)  $\frac{1-r^2}{r}$       20)  $\frac{bcx+acy+abz}{abc}$
- 21)  $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$       22)  $\frac{x+y+z}{xyz}$       23)  $\frac{2a+b}{a}$       24)  $-\frac{b}{a}$
- 25)  $\frac{3y^3-2x^3-4xy^2}{36x^2y^2}$       26)  $\frac{ab+2b-4}{b}$       27) 1      28)  $\frac{a^3+2a+3}{a^2}$
- 29)  $\frac{a^2-1}{a^3}$       30)  $\frac{5}{12x}$       31) 2      32)  $\frac{2}{a}$
- 33)  $\frac{a^2+a+1}{a^3}$       34)  $\frac{28}{9x^2}$       35)  $\frac{a^4+a^3+a^2+a+1}{a^2}$       36)  $\frac{3-2c}{c^3}$
- 37)  $\frac{5x^2-3x+4}{6(x+1)(x-1)^2}$       38)  $\frac{2b+3}{(b-3)^2}$       39)  $\frac{4a}{(2a+1)(2a-1)}$       40)  $\frac{1}{x^4(x+1)^3}$
- 41)  $\frac{2(x+y)}{x-y}$       42)  $\frac{4t+14}{(t+2)(t+3)}$       43)  $\frac{-x^2-5y^2}{12(x-y)^2} = -\frac{x^2+5y^2}{12(x-y)^2}$       44)  $\frac{4-y}{(y+3)(y-3)}$
- 45)  $\frac{a+1}{3a-2}$       46)  $\frac{4-a^2}{2(a-1)^2(a^2+2)}$       47)  $\frac{q^2+3q+3}{q(q+1)}$       48) 2
- 49)  $\frac{2b}{(a+b+c)^4}$       50)  $\frac{3a-b}{a-b}$       51)  $\frac{2b}{a-b}$       52)  $\frac{5(a+1)}{(a-2)(2a-1)}$       53)  $\frac{a^2}{x^2(a+x)^2}$
- 54)  $\frac{14y+7}{(y-3)(y-4)(y+4)}$       55)  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$       56)  $\frac{x^3-1}{(x^2+1)^2(x+1)}$       57)  $-\frac{1}{(r+s+1)(r+s)}$
- 58)  $\frac{w+1}{(w+2)(w+3)}$       59)  $\frac{11x-5y}{(x-3y)(x+4y)^2}$       60)  $-\frac{6t+4}{(t+2)^3}$       61)  $\frac{t+3}{(t-2)(2t-1)(2t+1)}$
- 62)  $\frac{3+x^2-y^2}{x-y}$       63)  $\frac{14a+49}{a+7}$       64)  $\frac{1}{a+b}$       65)  $-\frac{2+c}{(1+c)(1-c)}$
- 66)  $\frac{a+5}{(a+3)(a-3)}$       67)  $\frac{n+2}{(n-2)(n+1)(n-1)}$       68)  $\frac{1}{k^2}$       69)  $\frac{10x}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)}$
- 70)  $\frac{1}{(a-1)(a-2)(a^2+a+1)}$       71)  $\frac{y-10}{2(y+1)(y+2)(2y+1)}$