

7. FRAZIONI ALGEBRICHE: LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

Per non appesantire troppo l'argomento, abbiamo posticipato fino a questo punto una questione che comunque va trattata.

Ben sappiamo che in una frazione il denominatore "deve essere diverso da 0", in quanto **la divisione per 0 è una operazione "non eseguibile"**.

Ricordiamone brevemente il motivo.

La divisione, in matematica, è intesa come l'operazione inversa della moltiplicazione.

Il motivo per cui, ad esempio, si ha $28 : 4 = 7$,

è che il 7, se venisse moltiplicato per 4, restituirebbe il 28: $7 \cdot 4 = 28$.

Insomma, $a : b = c \leftrightarrow c \cdot b = a$.

Consideriamo ora l'operazione $5 : 0$.

$$5 : 0 = ?$$

Dovremmo trovare un numero che moltiplicato per 0 dia 5 ... ma non lo troveremo mai!

Un numero siffatto non esiste, perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà sempre e soltanto 0.

Allora l'operazione $5 : 0$ è IMPOSSIBILE, è priva di risultato; non c'è nessun numero che possa "pretendere di esserne il risultato".

Ovviamente, lo stesso ragionamento varrebbe se al posto del 5 considerassimo il 4, o il 37,238 oppure il -72 .

L'operazione particolarissima $0 : 0$ si comporta invece in modo profondamente diverso.

Essa ci chiede di trovare un numero che moltiplicato per 0 (il *secondo* 0) dia 0 (il *primo* 0).

Senonché, questa volta, *qualsiasi* numero andrebbe bene, *qualsiasi* numero potrebbe "pretendere di essere il risultato" di questa operazione, perché *qualsiasi* numero moltiplicato per 0 in effetti dà 0.

Se viene da me il numero 15, lui può dirmi: "il risultato dell'operazione $0 : 0$ sono io! Infatti, $15 \cdot 0 = 0$ ".

Ma anche il numero 9 può avere questa pretesa, di andar bene come risultato dell'operazione $0 : 0$, perché $9 \cdot 0 = 0$; e pure i numeri $3/5$; 29,71; $-8,3$; ecc. ecc. ecc. sarebbero adeguati come risultati.

Questa volta ci troviamo di fronte a ... problemi di "abbondanza".

L'operazione è INDETERMINATA, vale a dire:

non ha un risultato ben determinato, ma potrebbe averne infiniti,

dato che qualunque numero avrebbe i requisiti per esserne il risultato.

Ricapitolando, le due operazioni

♪ (numero diverso da 0) : 0

♪ 0 : 0

sarebbero, rispettivamente,

♪ IMPOSSIBILE (= nessun risultato)

♪ e INDETERMINATA (= infiniti risultati);

per cui non si tratta di "vere" operazioni:

la comunità matematica le considera come operazioni "non eseguibili", "*illegal operations*" ("illegal" da tradurre come "illecite").

Osserviamo, infine, che se lo 0, in una divisione, comparisse esclusivamente a *dividendo*,

l'operazione sarebbe normalissima e avrebbe 0 come risultato:

$$0 : 4 = 0 \quad (\text{infatti } \underbrace{0}_{\text{risul-}} \cdot \underbrace{4}_{\text{divi-}} = \underbrace{0}_{\text{tato-}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{ore-}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{dendo}})$$

Tutto ciò, insieme col fatto che una frazione $\frac{p}{q}$ equivale sostanzialmente alla divisione $p : q$,

ci porta all'importantissimo specchietto seguente ♥ :

| | | | | |
|--------------------------------------|---|------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $(\text{numero diverso da } 0) : 0,$ | $\frac{\text{numero diverso da } 0}{0}$ | operazione | IMPOSSIBILE |] operazioni "non eseguibili" |
| $0 : 0,$ | $\frac{0}{0}$ | operazione | INDETERMINATA | |
| $0 : (\text{numero diverso da } 0),$ | $\frac{0}{\text{numero diverso da } 0}$ | operazione | NORMALE (con risultato 0) | |

Di fronte a un'espressione contenente frazioni con lettere a denominatore, dobbiamo allora tenere presente che la medesima *non* ha significato per *qualsiasi* valore delle lettere coinvolte, *ma solo* per quei valori delle lettere che rendono *tutti i suoi denominatori diversi da 0*.

- Facciamo un esempio. Consideriamo l'espressione $\frac{a-1}{a-2} + \frac{a+3}{a+4} + \frac{1}{5a+6}$.

Per quali valori della lettera a esisterà (= sarà definita, avrà significato)?

Beh, esisterà per i valori di a tali che sia $\begin{cases} a-2 \neq 0 \\ a+4 \neq 0 \\ 5a+6 \neq 0 \end{cases}$, ossia per $\begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq -4 \\ a \neq -6/5 \end{cases}$

Osserviamo che queste CONDIZIONI DI ESISTENZA, contenenti il simbolo " \neq " (= "diverso da"), si "trattano" in modo del tutto simile alle equazioni, semplicemente conservando sempre il simbolo " \neq " al posto del simbolo " $=$ ". Ad esempio:

$$5a+6 \neq 0$$

$$5a \neq -6 \text{ (trasporto, cambiando di segno)}$$

$$a \neq -\frac{6}{5} \text{ (divido per 5)}$$

- Un altro esempio. Quali sono le condizioni di esistenza (C.E.) dell'espressione $\frac{b+1}{2b} + \frac{1}{b+2} + \frac{b-1}{(2b-1)^2}$?

CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.):

$$\begin{cases} 2b \neq 0 \\ b+2 \neq 0 \\ (2b-1)^2 \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} b \neq 0 \text{ (dividendo per 2)} \\ b \neq -2 \text{ (trasportando)} \\ 2b-1 \neq 0 \text{ (un quadrato è } \neq \text{ da 0 se e solo se lo è la sua base); } 2b \neq 1; b \neq 1/2 \end{cases}$$

- Ancora: quali sono le condizioni di esistenza (C.E.) dell'espressione $\frac{1}{c-3d} + \frac{1}{c+d-1}$?

CONDIZIONI DI ESISTENZA (C.E.):

$$\begin{cases} c-3d \neq 0 \\ c+d-1 \neq 0 \end{cases} \text{ (Di norma, quando in una condizione sono presenti due lettere, se ne isola una a scelta. Noi, in particolare, abbiamo desunto che, affinché l'espressione abbia significato, } c \text{ deve essere diversa sia dal triplo di } d, \text{ sia dall'opposto di } d \text{ aumentato di 1. Ad esempio, nel nostro caso, la coppia } c=12, d=4, \text{ nella quale } c \text{ è il triplo di } d, \text{ renderebbe priva di significato l'espressione in esame).}$$

- Terminiamo questa rassegna di esempi con: $\frac{1}{10x^2-90} + \frac{1}{x^3-x^2-6x}$

Qui, per capire "da cosa deve essere diversa x ", scomponiamo innanzitutto in fattori!

Ogni fattore così ottenuto dovrà essere diverso da 0, affinché non si annulli nessun denominatore ...

$$\frac{1}{10x^2-90} + \frac{1}{x^3-x^2-6x} = \frac{1}{10(x^2-9)} + \frac{1}{x(x^2-x-6)} = \frac{1}{10(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x(x-3)(x+2)}$$

Quindi, C.E.: $\begin{cases} x+3 \neq 0, x \neq -3 \\ x-3 \neq 0, x \neq 3 \\ x \neq 0 \\ x+2 \neq 0, x \neq -2 \end{cases}$ (brevemente: $x \neq \pm 3, x \neq 0, x \neq -2$)

Osserviamo che il fattore costante 10 non viene in alcun modo coinvolto, non contenendo la lettera ed essendo $\neq 0$ "per sua natura".

ESERCIZI Scrivi le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche che seguono.

- 1) $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-2}{a+2}$ 2) $\frac{b-3}{4b} + \frac{2}{b+5}$ 3) $\frac{x}{3x-1} + \frac{x-4}{2x+5}$ 4) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{2x+6}$ 5) $\frac{q}{p} + \frac{p-1}{3q-2}$ 6) $\frac{y-1}{2} - \frac{y+1}{3y}$
7) $\frac{w+3}{3w^2} + \frac{2}{5(w-1)^3}$ 8) $\frac{1}{a^2-a-12} - 2 \cdot \frac{a+5}{a^2-a}$ 9) $\frac{a-b}{a-2b} + \frac{a}{a-3b-1}$ 10) $\frac{x-3}{xy} + \frac{y}{4x-y-1}$ 11) $\frac{x-2y}{(4x+y)^2}$

RISPOSTE 1) $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b \neq 0 \\ b \neq -5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \neq 1/3 \\ x \neq -5/2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} p \neq 0 \\ q \neq 2/3 \end{cases}$ 6) $y \neq 0$ 7) $\begin{cases} w \neq 0 \\ w \neq 1 \end{cases}$

- 8) $a \neq 4, a \neq -3, a \neq 0, a \neq 1$ 9) $\begin{cases} a \neq 2b \\ a \neq 3b+1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y \neq 4x-1 \text{ oppure } x \neq \frac{y+1}{4} \end{cases}$ 11) $y \neq -4x \text{ oppure } x \neq -\frac{y}{4}$