8. ESPRESSIONI CON TUTTE LE OPERAZIONI: ESEMPI SVOLTI

1) $$\left(\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{1}{x^2-4}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)=$$
$$=\left[\frac{x+2}{x(x-2)}+\frac{1}{(x+2)(x-2)}\right]\cdot\frac{\cancel{x}+4\cancel{-x}-1}{(x+1)(x+4)}=$$
$$=\frac{(x+2)^2+x}{x(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3}{(x+1)(x+4)}=$$
$$=\frac{x^2+4x+4+x}{x(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3}{(x+1)(x+4)}=$$
$$=\frac{x^2+5x+4}{x(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3}{(x+1)(x+4)}=$$
$$=\frac{\cancel{(x+1)(x+4)}}{x(x+2)(x-2)}\cdot\frac{3}{\cancel{(x+1)(x+4)}}=$$
$$=\frac{3}{x(x+2)(x-2)}$$

SUGGERIMENTI PREZIOSI:

- ♥ **Ordine! Scrivi bene!**
- ♥ **Rileggi dopo ogni passaggio!**
- ♥ **Prima di ogni passaggio, domandati:**

"cosa devo fare,
cosa mi conviene fare
a questo punto?"

RICORDA:

- ♥ **Il simbolo " = " che chiude una riga deve essere poi riscritto anche all'inizio della riga successiva**
- ♥ **Quando si fa il denominatore comune, ottenendo così un'unica linea di frazione, è inutile (anche se non sarebbe sbagliato) mettere questa frazione fra parentesi** (a meno che, naturalmente, la frazione sia poi da elevare a potenza)

2) $$\left(\frac{x+5}{x-2}-1\right):\left(\frac{1}{x^2-7x+10}-\frac{1}{x^2-25}\right)+25=$$
$$=\frac{\cancel{x}+5\cancel{-x}+2}{x-2}:\left[\frac{1}{(x-2)(x-5)}-\frac{1}{(x+5)(x-5)}\right]+25=$$
$$=\frac{7}{x-2}:\frac{\cancel{x}+5\cancel{-x}+2}{(x-2)(x-5)(x+5)}+25=\frac{7}{x-2}:\frac{7}{(x-2)(x-5)(x+5)}+25=$$
$$=\frac{\cancel{7}}{\cancel{x-2}}\cdot\frac{\cancel{(x-2)}(x-5)(x+5)}{\cancel{7}}+25=x^2\cancel{-25}\cancel{+25}=x^2$$

Ti ricordo la
IMPORTANTISSIMA RACCOMANDAZIONE
fatta a pag. 244:
IN UNA FRAZIONE,
sarebbe
errore madornale
semplificare
addendo con addendo
oppure
addendo con fattore:
SI PUO' SOLO SEMPLIFICARE FATTORE CON FATTORE.

3) $$\left(\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}\right)\cdot\left(\frac{a}{4x}+\frac{x}{4a}+\frac{1}{2}\right)=\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}\cdot\frac{a^2+x^2+2ax}{4ax}=$$
$$=\frac{\cancel{a^2}+2ax\cancel{+x^2}\cancel{-a^2}+2ax\cancel{-x^2}}{(a-x)(a+x)}\cdot\frac{(a+x)^2}{4ax}=\frac{\cancel{4ax}}{(a-x)\cancel{(a+x)}}\cdot\frac{(a+x)^{\cancel{2}}}{\cancel{4ax}}=\frac{a+x}{a-x}$$

4) $$\frac{12}{4a^2-9}\cdot\left(\frac{a}{3a+3}-\frac{1}{2a+2}\right)=\frac{12}{(2a+3)(2a-3)}\cdot\left[\frac{a}{3(a+1)}-\frac{1}{2(a+1)}\right]=$$
$$=\frac{\cancel{12}^{2}}{(2a+3)\cancel{(2a-3)}}\cdot\frac{\cancel{2a-3}}{\cancel{6}(a+1)}=\frac{2}{(2a+3)(a+1)}$$

5) $$\left(\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{1}{a^2+7a+12}\right)\cdot\frac{a^2+6a+8}{2}=\left[\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}\right]\cdot\frac{(a+2)(a+4)}{2}=$$
$$=\frac{a+4+a+2}{\cancel{(a+2)}(a+3)\cancel{(a+4)}}\cdot\frac{\cancel{(a+2)}\cancel{(a+4)}}{2}=\frac{2a+6}{2(a+3)}=\frac{\cancel{2(a+3)}}{\cancel{2(a+3)}}=1$$

6) $$\left(\frac{a+1}{a^2-a}-\frac{a}{a^2-1}\right)\cdot\frac{2a+2}{2a+1}=\left[\frac{a+1}{a(a-1)}-\frac{a}{(a+1)(a-1)}\right]\cdot\frac{2(a+1)}{2a+1}=$$
$$=\frac{(a+1)^2-a^2}{a(a-1)\cancel{(a+1)}}\cdot\frac{2\cancel{(a+1)}}{2a+1}=\frac{\cancel{a^2}+2a+1\cancel{-a^2}}{a(a-1)}\cdot\frac{2}{2a+1}=\frac{\cancel{2a+1}}{a(a-1)}\cdot\frac{2}{\cancel{2a+1}}=\frac{2}{a(a-1)}$$

7) $$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\frac{x^5+x^3}{x^4-1}\cdot(x-1)=\frac{x+1}{\cancel{x^3}}\cdot\frac{\cancel{x^3}\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}\cdot(x-1)=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}\cdot\cancel{(x-1)}=1$$

8) $$\left(\frac{1}{b^2+2b}+2\cdot\frac{1}{b^3-2b^2}\right):\frac{b^2+4}{b^2-4}=\left[\frac{1}{b(b+2)}+\frac{2}{b^2(b-2)}\right]:\frac{b^2+4}{(b+2)(b-2)}=$$
$$=\frac{b(b-2)+2(b+2)}{b^2\cancel{(b+2)}\cancel{(b-2)}}\cdot\frac{\cancel{(b+2)}\cancel{(b-2)}}{b^2+4}=\frac{b^2\cancel{-2b}\cancel{+2b}+4}{b^2(b^2+4)}=\frac{\cancel{b^2+4}}{b^2\cancel{(b^2+4)}}=\frac{1}{b^2}$$

9) $$\left(\frac{a-b}{a-2b}-\frac{a+2b}{a+b}\right)(a^2-3ab+2b^2)=\frac{\cancel{a^2}-b^2\cancel{-a^2}+4b^2}{\cancel{(a-2b)}(a+b)}\cdot(a-b)\cancel{(a-2b)}=\frac{3b^2(a-b)}{a+b}$$

10) $$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+b=\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{b+a}{ab}}+b=\frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{ab}}\cdot\frac{\cancel{ab}}{\cancel{b+a}}+b=a\cancel{-b}\cancel{+b}=a$$

11) $$\frac{\frac{a+b}{a-b}+1}{\frac{a+b}{a-b}-1}-\frac{a}{b}=\frac{\frac{a\cancel{+b}+a\cancel{-b}}{a-b}}{\frac{\cancel{a}+b\cancel{-a}+b}{a-b}}-\frac{a}{b}=\frac{\frac{2a}{a-b}}{\frac{2b}{a-b}}-\frac{a}{b}=\frac{\cancel{2}a}{\cancel{a-b}}\cdot\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{2}b}-\frac{a}{b}=\cancel{\frac{a}{b}}\cancel{-\frac{a}{b}}=0$$

12) $$(y+2)^2\cdot\frac{\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+2}}{\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+3}}=(y+2)^2\cdot\frac{\frac{\cancel{y}+2\cancel{-y}-1}{(y+1)(y+2)}}{\frac{y+3+y+1}{(y+1)(y+3)}}=(y+2)^2\cdot\frac{\frac{1}{(y+1)(y+2)}}{\frac{2y+4}{(y+1)(y+3)}}=$$
$$=\cancel{(y+2)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{(y+1)}\cancel{(y+2)}}\cdot\frac{\cancel{(y+1)}(y+3)}{2\cancel{(y+2)}}=\frac{y+3}{2}$$

13) $$\frac{1-\frac{13}{x^2}+\frac{36}{x^4}}{x^2-5x+6}=\frac{\frac{x^4-13x^2+36}{x^4}}{(x-2)(x-3)}=\frac{(x^2-4)(x^2-9)}{x^4}\cdot\frac{1}{(x-2)(x-3)}=$$
$$=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(x+3)\cancel{(x-3)}}{x^4}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}=\frac{(x+2)(x+3)}{x^4}$$

♥ **Nell'esercizio qui a fianco e nel successivo, occhio alle modalità dei "capovolgimenti"!**

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}}$$

14) $$\frac{1+\frac{y}{x}}{x-y}-\frac{1-\frac{y}{x}}{x+y}=\frac{\frac{x+y}{x}}{x-y}-\frac{\frac{x-y}{x}}{x+y}=\frac{x+y}{x}\cdot\frac{1}{x-y}-\frac{x-y}{x}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{x+y}{x(x-y)}-\frac{x-y}{x(x+y)}=$$
$$=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x(x+y)(x-y)}=\frac{\cancel{x^2}+2xy\cancel{+y^2}\cancel{-x^2}+2xy\cancel{-y^2}}{x(x+y)(x-y)}=\frac{4\cancel{x}y}{\cancel{x}(x+y)(x-y)}=\frac{4y}{(x+y)(x-y)}$$

❑ Le seguenti tre espressioni presentano somme algebriche di frazioni algebriche,
con **polinomi opposti a denominatore**.
In casi di questo genere, è sempre conveniente,
prima di fare il denominatore comune, sbarazzarsi dei fastidiosi polinomi opposti,
facendo in modo che compaia dappertutto sempre lo stesso polinomio.

15) $$\frac{a^2}{(a-2)^3}+\frac{1}{2-a}+\frac{1}{(2-a)^4}=$$
$$=\frac{a^2}{(a-2)^3}+\frac{1}{-(a-2)}+\underbrace{\frac{1}{(a-2)^4}}_{\text{NOTA}}=$$
$$=\frac{a^2}{(a-2)^3}-\frac{1}{a-2}+\frac{1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{a^2(a-2)-(a-2)^3+1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{a^3-2a^2-(a^3-6a^2+12a-8)+1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{\cancel{a^3}-2a^2\cancel{-a^3}+6a^2-12a+8+1}{(a-2)^4}=$$
$$=\frac{4a^2-12a+9}{(a-2)^4}=\frac{(2a-3)^2}{(a-2)^4}$$

NOTA
Sappiamo che
$$(2-a)^4=(a-2)^4$$
per via dell'esponente pari:

due numeri opposti,
se elevati allo stesso esponente PARI,
danno risultati uguali;

d'altronde,
$$(2-a)^4=\left[-(a-2)\right]^4=+(a-2)^4$$

16) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{-(a-b)(b-c)}+\frac{1}{-(a-c)\cdot\left[-(b-c)\right]}=$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}=$$
$$=\frac{\cancel{b}\cancel{-c}\cancel{-a}\cancel{+c}\cancel{+a}\cancel{-b}}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$

17) $$\left[\frac{3}{x^2-1}+\frac{x}{(1-x)^3}\right]\cdot\frac{1}{2x-1}=\left[\frac{3}{(x+1)(x-1)}+\frac{x}{-(x-1)^3}\right]\cdot\frac{1}{2x-1}=$$
$$=\left[\frac{3}{(x+1)(x-1)}-\frac{x}{(x-1)^3}\right]\cdot\frac{1}{2x-1}=\frac{3(x-1)^2-x(x+1)}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=$$
$$=\frac{3x^2-6x+3-x^2-x}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=\frac{2x^2-7x+3}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=$$
$$=\frac{2x^2-6x-x+3}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=\frac{2x(x-3)-(x-3)}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{2x-1}=$$
$$=\frac{(x-3)\cancel{(2x-1)}}{(x+1)(x-1)^3}\cdot\frac{1}{\cancel{2x-1}}=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)^3}$$

❑ Nella seguente espressione compare una **semplificazione fra polinomi opposti.**

18) $$\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{3}{x}}\left(9-x^2\right)=\frac{\cancel{x}\cdot\frac{x+1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x+2}{x}}{\frac{x-3}{x}}(3+x)(3-x)=$$

$$=\frac{(x+1)(x+2)}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{x-3}}\cdot(3+x)\overset{-1}{\cancel{(3-x)}}=-(x+1)(x+2)(x+3)$$

❑ Nell'esempio che segue è necessario, per fattorizzare un polinomio, applicare il **metodo di Ruffini**. La scomposizione, in questi casi, va fatta a parte e successivamente reinserita nell'espressione.

19) $$\left(\frac{1}{2x^3+x^2-5x+2}-\frac{1}{x^2+x-2}\right)\left(\frac{1}{2}-2x^2\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{(x-1)(x+2)(2x-1)}-\frac{1}{(x-1)(x+2)}\right]\cdot\frac{1-4x^2}{2}=$$

$$=\frac{1-2x+1}{(x-1)(x+2)(2x-1)}\cdot\frac{(1+2x)(1-2x)}{2}=$$

$$=\frac{2-2x}{(x-1)(x+2)(2x-1)}\cdot\frac{(1+2x)(1-2x)}{2}=$$

$$=\frac{\cancel{2}\,\overset{-1}{\cancel{(1-x)}}}{\cancel{(x-1)}\,(x+2)\,\cancel{(2x-1)}}\cdot\frac{(1+2x)\,\overset{-1}{\cancel{(1-2x)}}}{\cancel{2}}=\frac{2x+1}{x+2}$$

$2x^3+x^2-5x+2$
Divisori del termine noto : $\pm1,\ \pm2$
Divisori del 1° coeff.: $\pm1,\ \pm2$
Possibili zeri razionali : $\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{2}$
$P(1)=2+1-5+2=0,\ \ OK$

	2	1	–5	2
1		2	3	–2
	2	3	–2	0

$$2x^3+x^2-5x+2=$$
$$=(x-1)\left(2x^2+3x-2\right)=$$
$$=(x-1)\left(2x^2+4x-x-2\right)=$$
$$=(x-1)\left[2x(x+2)-(x+2)\right]=$$
$$=(x-1)(x+2)(2x-1)$$

❑ E terminiamo la rassegna di esempi con due espressioni che contengono **potenze**.

20) $$\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^2\left(x^2-4\right)^3=\left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-2}{x}}\right)^2(x+2)^3(x-2)^3=$$

$$=\left(\frac{x-1}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{x-2}\right)^2(x+2)^3(x-2)^3=$$

$$=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2(x+2)^3(x-2)^3=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{\cancel{(x-2)^2}}(x+2)^3(x-2)^{\cancel{3}}=(x-1)^2(x+2)^3(x-2)$$

21) $$\left(\frac{1}{3a}-\frac{a+1}{2a}+1\right)\cdot\frac{6a^{-1}}{9-a^{-2}}=$$

$$=\frac{2-3(a+1)+6a}{6a}\cdot\frac{6\cdot\frac{1}{a}}{9-\frac{1}{a^2}}=$$

$$=\frac{2-3a-3+6a}{6a}\cdot\frac{\frac{6}{a}}{\frac{9a^2-1}{a^2}}=$$

$$=\frac{\cancel{3a-1}}{\cancel{6}\,\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{a}}\cdot\frac{\overset{\cancel{2}}{\cancel{a}}}{(3a+1)\,\cancel{(3a-1)}}=\frac{1}{3a+1}$$

Dal sito
www.themathpage.com
di
Lawrence Spector

Example
$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}$$
Solution.
These denominators have no common factors.
Therefore, the LCM of denominators is their product.
$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{2x-(x-1)}{x(x-1)}=\frac{2x-x+1}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x(x-1)}$$
[*LCM = Lowest Common Multiple*]

Note:
The entire $x-1$
is being subtracted.
Therefore,
we write it
in parentheses,
and its signs change.