

10. IDENTITA' CON FRAZIONI ALGEBRICHE (risposte a pag. 269)

- 1) Verifica che, qualunque sia il numero a , diverso da 0, $+1$, -1 , sussiste la relazione

$$\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a-1}}{1 + \frac{1}{a-1}} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+1}$$

- 2) Verifica che vale l'identità $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{-1} = -\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-1}$

- 3) La somma dei reciproci di due numeri non nulli qualsiasi è sempre uguale al rapporto fra la loro somma e il loro prodotto. Rappresenta questo enunciato con una formula, e dimostrarne la validità.

- 4) Dimostra che se si prendono tre interi consecutivi e si divide il loro prodotto per la loro somma, il risultato è uguale alla terza parte del prodotto fra il più piccolo e il più grande.

- 5) Dopo aver controllato che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned}\frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} &= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \\ \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} &= \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \\ \frac{6 \cdot 3}{4 \cdot 5} &= \left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right) \\ &\dots\end{aligned}$$

scrivi l'uguaglianza generale che sembra potersi ricavare dalla sequenza, e dimostra che è valida sempre.

$$\begin{aligned}6) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{1+1} &= \frac{1}{1 \cdot (1+1)} + \frac{2}{1+1} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} &= \frac{1}{2 \cdot (2+1)} + \frac{2}{2+1} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3+1} &= \frac{1}{3 \cdot (3+1)} + \frac{2}{3+1} \\ &\dots\end{aligned}$$

Scrivi l'uguaglianza generale che si può ipotizzare dalla sequenza, e dimostra che è valida sempre.

- 7) Verifica l'identità $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

Cosa diventa se facciamo la sostituzione $n \rightarrow n-1$?

- 8) Verifica l'identità $\frac{ab}{(a+1)(b+1)} = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right)\left(1 - \frac{1}{b+1}\right)$ e riscrivila nel caso particolare $b = a$.

- 9) [University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition](#) 1990

I) Determina il valore del prodotto delle frazioni seguenti:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} \cdot \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} \cdot \dots \cdot \frac{\frac{1}{98} - \frac{1}{99}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}}$$

- a) $1/2$ b) 2 c) 0.02 d) 50 e) $1/100$

II) In generale, quanto vale l' n -esima frazione in gioco, fra quelle moltiplicate?

III) Se le frazioni moltiplicate sono n , quanto vale il loro prodotto?

- 10) [University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition](#) 1990

You are told that certain unknown positive integers p, q, r, s satisfy $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$.

Which of the following statements must be true?

- a) $\frac{p}{s} = \frac{r}{q}$ b) $\frac{p}{r} = \frac{s}{q}$ c) $\frac{p}{q} = \frac{p+r}{q+s}$ d) $\frac{r}{s}$ doesn't equal $\frac{r-p}{s-q}$ e) None of a), b), c), d)

- 11) Per ultimare un determinato lavoro in 1 giorno ci vogliono

 a apprendisti, o in alternativa e lavoratori esperti.

In quanti giorni porterebbe a termine quel lavoro una coppia formata da 1 apprendista e 1 esperto?

a) $\frac{1}{a+e}$ b) $\frac{1}{ae}$ c) $\frac{a+e}{ae}$ d) $\frac{ae}{a+e}$

- 12) Considera le seguenti frazioni algebriche e stabilisci per quali valori di
- x
- ciascuna di esse risulta

(1) non definita, in quanto corrisponderebbe ad una operazione impossibile

(2) non definita, in quanto corrisponderebbe ad una operazione indeterminata

(3) uguale a 0

	(1): imposs.	(2): indet.	(3): uguale a 0
$\frac{x+12}{x-21}$	$x=21$	/	$x=-12$
$\frac{4x-2}{2x-1}$			
$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}$			
$\frac{3x+1}{3x}$			
$\frac{3x}{3x+1}$			
$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$			
$\frac{9x+27}{x^2+6x+9}$			

RIPASSO ($a \neq 0$):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{0} \text{ IMPOSS.} \\ \frac{0}{0} \text{ INDET.} \\ \frac{0}{a} = 0 \text{ operazione normalissima} \end{array} \right\} \text{ "illegal operations"}$$

Frazione = divisione, e
divisione = operazione inversa
della moltiplicazione

$$a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$$

1 : 0, 1/0 è IMPOSSIBILE
perché non c'è alcun numero
che moltiplicato per 0 dia 1
0 : 0, 0/0 è INDETERMINATA
perché qualsiasi numero
moltiplicato per 0 dà 0

- 13) C'è qualche piccola differenza fra le due espressioni algebriche
- $\frac{1}{1+\frac{2}{x-4}}$
- e
- $\frac{x-4}{x-2}$
- ?

- 14) Sarà mai possibile esprimere la frazione algebrica
- $\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)}$

come somma algebrica di due frazioni aventi

a denominatore rispettivamente $x+3$ e $x-5$, e a numeratore due numeri?

Vediamo.

$$\begin{aligned} \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} \\ \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{A(x-5) + B(x+3)}{(x+3)(x-5)} \\ \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{Ax - 5A + Bx + 3B}{(x+3)(x-5)} \\ \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{Ax + Bx - 5A + 3B}{(x+3)(x-5)} \\ \frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} &= \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{(x+3)(x-5)} \end{aligned}$$

Affinché l'ultima uguaglianza sia una identità occorre e basta che sia $\begin{cases} A+B=5 \\ -5A+3B=-41 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A=7 \\ B=-2 \end{cases}$ quindi in definitiva la risposta alla domanda iniziale è affermativa: si avrà $\frac{5x-41}{(x+3)(x-5)} = \frac{7}{x+3} - \frac{2}{x-5}$ Ora determina tu i valori delle costanti A, B, C negli esercizi seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{9x+4}{(2x-3)(x+1)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{x+1} & \text{b) } \frac{20t+11}{16t^2-1} = \frac{A}{4t+1} + \frac{B}{4t-1} & \text{c) } \frac{5-6x}{x(3x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x+2} \\ \text{d) } \frac{2x^2+14x+8}{x(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4} & \text{e) } \frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} & \end{array}$$

- 15) Dalla formula di Gauss $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ se ne possono ricavare altre, assai interessanti.

Ad esempio, è abbastanza semplice (vuoi provarci?) dedurre da questa formula che

- a) la somma $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ dei primi n numeri pari a partire da 2 vale $\frac{n(n+1)}{2}$
 b) mentre la somma $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ dei primi n numeri dispari vale n^2 .

Un po' più laborioso è invece determinare il valore della somma $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ dei quadrati dei primi n interi positivi.

Partiamo dall'identità $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

e portiamola nella forma $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

Ora scriviamo le varie uguaglianze che si ottengono dalla precedente dando a x i valori: 1, 2, 3, ...

$$\begin{aligned} x=1: & \quad 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ x=2: & \quad 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ x=3: & \quad 4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ x=4: & \quad 5^3 - 4^3 = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 \\ \dots & \quad \dots \\ x=n: & \quad (n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Sommando membro a membro queste uguaglianze si ha:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ addendi}}$$

quindi, tenuto conto della formula di Gauss,

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

da cui l'identità

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dots \text{ (scrivi tu il secondo membro!)}$$

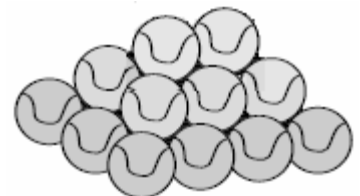
- c) Verifica che in questo modo si ottiene, dopo qualche passaggio, la formula

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- d) Operando in modo analogo, dimostra la formula $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
 dalla quale si trae immediatamente la bella relazione

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

- 16) La figura qui a fianco mostra alcune palline da tennis sistemate su più strati sovrapposti: quello più in alto è formato da 2 palline soltanto, quello appena sotto da 6 palline, quello sotto ancora da 12, ecc. Se si avessero n strati, le palline dello strato inferiore sarebbero $n(n+1)$; ... ma quante palline si avrebbero nella pila, in totale?



- 17) I numeri “quadrati” sono

$$1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16, \quad 5^2 = 25, \quad \dots$$

I seguenti numeri si dicono invece “triangolari”:

$$1, \quad 1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad 1+2+3+4+5=15, \quad \dots$$

Serviti della formula di Gauss per dimostrare il seguente enunciato:

“ciascun numero quadrato è uguale alla somma del numero triangolare di ugual posto, e del numero triangolare che precede quest'ultimo” (es.: $16 = 10 + 6$)



- 18) [University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition](#) 1991

The average (media) of the first 100 000 odd (dispari) positive integers is

- a) 100 000 b) 1 000 000 c) 10 000 000 d) 100 000 000 e) 1 000 000 000

- 19) Spunto preso da
- [Olimpiadas Colombianas De Matematicas](#)
- , 1999

Nell' n -esima figura di questo tipo, $\rightarrow$
che frazione del triangolo grande resta ombreggiata?



- 20)
- [British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest](#)
- Final Round, 1999

The page numbers of a book sum to 1999. One page number was counted twice.
Which page number was that?

RISPOSTE

- 3) In effetti l'uguaglianza
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$
- è, come si può controllare, un'identità

$$4) \frac{n(n+1)(n+2)}{n+(n+1)+(n+2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3n+3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3(n+1)} = \frac{n(n+2)}{3} \quad 5) \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$6) \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{n+1} \quad 7) \text{ Diventa } \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3}{n} + \frac{2}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}$$

$$8) \text{ Con } b = a: \frac{a^2}{(a+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right)^2 \quad 9) \text{ I) d} \quad \text{II) } \frac{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}} = \frac{n+1}{n} \quad \text{III) } n+1 \quad 10) \text{ c} \quad 11) \text{ d}$$

12)

	imposs.	indet.	= 0
$\frac{x+12}{x-21}$	$x = 21$	/	$x = -12$
$\frac{4x-2}{2x-1}$	/	$x = \frac{1}{2}$	/
$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}$	$x = 3, x = 4$	/	$x = 0, x = 1, x = 2$
$\frac{3x+1}{3x}$	$x = 0$	/	$x = -\frac{1}{3}$
$\frac{3x}{3x+1}$	$x = -\frac{1}{3}$	/	$x = 0$
$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$	$x = 3$	$x = 2$	$x = 1$
$\frac{9x+27}{x^2+6x+9}$	/	$x = -3$	/

- 13) La differenza è nel "campo di esistenza". $\frac{x-4}{x-2}$ ha significato per tutti i valori di x tranne $x = 2$,
 $\frac{1}{1 + \frac{2}{x-4}}$ perde significato sia con $x = 2$ che con $x = 4$.

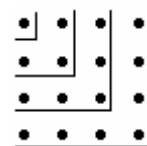
Per tutti i valori di x tranne 2 e 4 le frazioni assumono lo stesso valore.

$$14) \text{ a) } \begin{cases} A = 7 \\ B = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} A = -3 \\ B = 8 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} A = 5/2 \\ B = -27/2 \end{cases} : \frac{5/2}{x} + \frac{-27/2}{3x+2} = \frac{5}{2x} - \frac{27}{2(3x+2)} \quad \text{d) } \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = -2 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \\ C = 6 \end{cases}$$

$$15a) 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

$$15b) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = (2-1) + (4-1) + (6-1) + \dots + (2n-1) = (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$$

La figura qui a fianco $\rightarrow$
visualizza e giustifica
efficacemente l'enunciato!



$$16) \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) + 3 \cdot (3+1) + \dots + n \cdot (n+1) = 1 + 1 + 4 + 2 + 9 + 3 + \dots + n^2 + n =$$

$$= (1 + 4 + 9 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \dots = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

- 18) a
19) $\frac{n-1}{2n}$
20) page 46