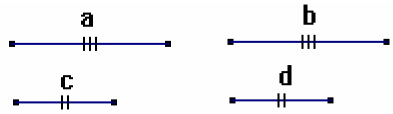
1.4 - ASSIOMI SU UGUAGLIANZE, DISUGUAGLIANZE, SOMME E DIFFERENZE

- **L'uguaglianza (congruenza) fra figure geometriche gode delle seguenti tre proprietà (assiomi):**
  - **PROPRIETA' RIFLESSIVA**
    Ogni figura è uguale a sé stessa: $\forall \mathbf{A},\quad \mathbf{A}=\mathbf{A}$ (*il simbolo* $\forall$ *significa "per ogni, per qualsiasi"*)
  - **PROPRIETA' SIMMETRICA**
    Se una figura **A** è uguale ad una figura **B**, allora anche **B** è uguale ad **A**: $\mathbf{A}=\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{A}$
  - **PROPRIETA' TRANSITIVA**
    Se una figura **A** è uguale ad una figura **B**, e la figura **B** a sua volta è uguale ad una figura **C**, allora **A** è uguale a **C**:
    $(\mathbf{A}=\mathbf{B}\wedge\mathbf{B}=\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{A}=\mathbf{C}$ (in altre parole, **due figure uguali ad una terza sono uguali fra loro**).

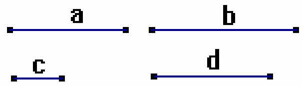
Useremo sovente la freccia $\rightarrow$ per schematizzare "SE … ALLORA …" (oppure "… IMPLICA …") o in certi casi "QUINDI, DI CONSEGUENZA"

- **La somma di segmenti gode delle proprietà commutativa e associativa. Idem per la somma di angoli.**
- **Somme, e differenze, di segmenti uguali sono uguali**. Vale a dire:
  $(a=b\wedge c=d)\rightarrow a+c=b+d;\qquad (a=b\wedge c=d)\rightarrow a-c=b-d$ (qui si suppone $a>c$)
  Questo assioma può essere anche enunciato dicendo che
  se due uguaglianze fra segmenti sono entrambe vere, allora addizionando o sottraendo membro a membro tali due uguaglianze si ottiene ancora un'uguaglianza vera:

$$\begin{array}{c} a=b \\ c=d \\ \hline a+c=b+d \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c} a=b \\ c=d \\ \hline a-c=b-d \end{array}$$



- **Un assioma analogo al precedente vale per gli angoli**; quindi:
  somme (e differenze) di angoli uguali sono uguali; oppure, in altre parole: addizionando (o sottraendo) membro a membro due uguaglianze vere fra angoli si ottiene ancora un'uguaglianza vera.
- Se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che $a<b$ e $c<d$, allora $a+c<b+d$;
  e se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che $a>b$ e $c>d$, allora $a+c>b+d$
  In altre parole, sommando membro a membro due disuguaglianze vere (e aventi lo stesso verso, cioè: o entrambe col <, o entrambe col >) fra segmenti, si ottiene ancora una disuguaglianza vera (con lo stesso verso).
  Osservazione: invece non è lecito SOTTRARRE membro a membro due disuguaglianze dello stesso verso, nel senso che la disuguaglianza che così si otterrebbe non è sempre vera: può essere vera o falsa, a seconda dei casi. Ad es., per la quaterna di segmenti della figura qui a fianco, sarebbe falsa.



Per i 4 segmenti a, b, c, d sopra raffigurati, risulta $a<b,\ c<d$. Bene! E' vero ora che $a+c<b+d$, mentre la disuguaglianza che si otterrebbe sottraendo membro a membro, ossia $a-c<b-d$, è FALSA.

- **Un assioma analogo al precedente vale per gli angoli.**
- **Addizionando, o sottraendo, uno stesso termine da entrambi i membri di una disuguaglianza vera, si ottiene ancora una disuguaglianza vera:** $a<b\ \rightarrow\ a+c<b+c$; $a<b\ \rightarrow\ a-c<b-c$. Idem col >.
- **Segmenti doppi di segmenti uguali sono uguali**: $a=b\rightarrow 2a=2b$
- **Metà di segmenti uguali sono uguali:** $a=b\rightarrow\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}b$
- **Più in generale**: $a=b\rightarrow\ ma=mb;\ \frac{1}{n}a=\frac{1}{n}b;\ \frac{m}{n}a=\frac{m}{n}b\ \left(m,n\in\mathbb{N}^{*};\ \text{la scrittura } \frac{m}{n}a \text{ significa } m\cdot\frac{1}{n}a\right)$
- **Assiomi analoghi ai tre precedenti valgono per gli angoli**. Quindi:
  angoli doppi di angoli uguali sono uguali; metà di angoli uguali sono uguali;
  e in generale, moltiplicando per uno stesso numero razionale positivo entrambi i membri di un'uguaglianza vera fra angoli, si ottiene ancora un'uguaglianza vera.
- Per i segmenti, leggendo prima i tre simboli "sopra" (<) poi i tre "sotto" (>): $a\lessgtr b\rightarrow 2a\lessgtr 2b$ e $\frac{1}{2}a\lessgtr\frac{1}{2}b$;
  più in generale, $a\lessgtr b\rightarrow\ ma\lessgtr mb,\ \frac{1}{n}a\lessgtr\frac{1}{n}b,\ \frac{m}{n}a\lessgtr\frac{m}{n}b\ \left(m,n\in\mathbb{N}^{*};\ \text{la scrittura } \frac{m}{n}a \text{ significa } m\cdot\frac{1}{n}a\right)$.
  E assiomi analoghi valgono per gli angoli.
- "**Tricotomia**": dati due segmenti a, b, si verifica una e una sola delle tre eventualità $a<b$, oppure $a=b$, o $a>b$.
  Analogamente per gli angoli.
- "**Principio di sostitutività**": in una catena di uguaglianze (o di disuguaglianze), è sempre lecito sostituire al posto di un segmento, un altro segmento che si sa (per ipotesi, o per dimostrazione precedente) essere uguale al primo. Lo stesso vale anche per gli angoli.