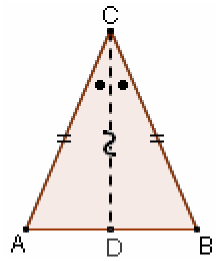
TEOREMA - In un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono uguali.



HP:
$\overline{CA} = \overline{CB}$

TH:
$\hat{A} = \hat{B}$

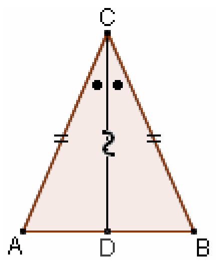
DIMOSTRAZIONE

Tracciamo la bisettrice dell'angolo al vertice $\hat{C}$ fino ad incontrare la base $\overline{AB}$ in D.
Confrontiamo ora i due triangoli CAD, CBD. Essi hanno:

- ✓ $\overline{CA} = \overline{CB}$ per HP;
- ✓ $\overline{CD}$ in comune, perciò uguale nei due triangoli ($\overline{CD} = \overline{CD}$);
- ✓ $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ per costruzione.

Pertanto i due triangoli sono uguali per il 1° criterio; ne consegue, in particolare, $\hat{A} = \hat{B}$, **C.V.D.**

TEOREMA - In un triangolo isoscele, la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza relativa alla base.
Quindi in un triangolo isoscele bisettrice, mediana e altezza relative alla base coincidono.



HP:
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$A\hat{C}D = B\hat{C}D$

TH:
$\overline{AD} = \overline{DB}$; $CD \perp AB$ $(C\hat{D}A = C\hat{D}B = 90°)$

DIMOSTRAZIONE

Come nella dimostrazione del teorema precedente, si confrontano i due triangoli CAD, CBD e li si dimostra uguali per il 1° Criterio.
Ne consegue, in particolare, che $\overline{AD} = \overline{DB}$ e con ciò la prima parte della tesi è dimostrata.
Ma dall'uguaglianza di CAD e CBD segue anche $C\hat{D}A = C\hat{D}B$; poiché ora questi ultimi due angoli sono pure supplementari (= danno per somma un angolo piatto), sarà $C\hat{D}A = C\hat{D}B = 180° : 2 = 90°$, **C.V.D.**

APPROFONDIMENTO TEORICO

Abbiamo usato articoli determinativi ("la" bisettrice/mediana/altezza) dando per scontato che, in un triangolo, di bisettrice che parte da un dato vertice ce ne sia UNA SOLA, di mediana UNA SOLA, di altezza UNA SOLA.
A voler essere del tutto rigorosi, occorrerebbe invece *classificare* i tre enunciati di **UNICITA'** della bisettrice, della mediana, e dell'altezza, o dichiarandoli esplicitamente come assiomi, oppure, se possibile, dimostrandoli come teoremi.
In effetti, tali tre enunciati sono dimostrabili (i primi due, molto facilmente), quindi vanno pensati come teoremi.

- **Unicità della mediana**: è legata al fatto che il punto medio di un segmento dato è unico.
  Se infatti, per assurdo, un segmento assegnato AB avesse due distinti punti medi M, M', allora i segmenti AM e AM' dovrebbero essere uguali perché metà dello stesso segmento AB mentre non possono essere uguali perché hanno un estremo in comune e uno di essi "scappa fuori" dall'altro.

- **Unicità della bisettrice**: è dimostrabile con un ragionamento analogo a quello fatto per la mediana.
- **Unicità della perpendicolare (da un punto dato, ad una retta data)**:
  questo teorema è esposto nel prossimo capitolo, ma avrebbe potuto benissimo essere anticipato a questo livello, perché dipende esclusivamente dal "Teorema dell'angolo esterno in forma debole", che a sua volta richiede, per la sua dimostrazione, esclusivamente teoremi che al livello presente sono stati già dimostrati.

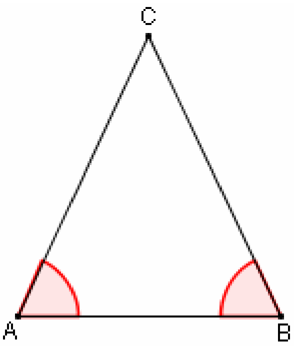
Osserviamo ancora che il nostro discorso dà pure per scontata l'**ESISTENZA** di mediana, bisettrice e altezza.

- L'**esistenza della mediana e della bisettrice** sono assicurate dagli **assiomi di divisibilità indefinita del segmento e dell'angolo**,
- mentre l'**esistenza dell'altezza può essere dimostrata**
  (il "**Teorema di esistenza della perpendicolare per un punto dato a una retta data**" è presentato nel capitolo successivo, ma avrebbe potuto benissimo essere anticipato a questo livello).

TEOREMA **Se un triangolo ha due angoli uguali, allora è isoscele**
(precisamente, i due lati uguali sono quelli opposti agli angoli uguali).

OSSERVAZIONE
Si tratta del teorema **inverso**
di quello che diceva:
"In un triangolo isoscele,
gli angoli alla base sono uguali".

NON SEMPRE, se vale un teorema,
vale anche l'enunciato inverso!!!
Ad es., è vero (lo dimostreremo a suo tempo) che
"se, in un quadrilatero, i lati sono tutti uguali,
allora le diagonali sono perpendicolari"
ma sarebbe FALSO affermare che
"se, in un quadrilatero, le diagonali sono perpendicolari,
allora i lati sono tutti uguali"

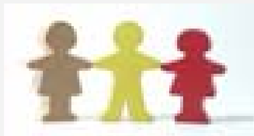


HP
$\hat{CAB} = \hat{CBA}$

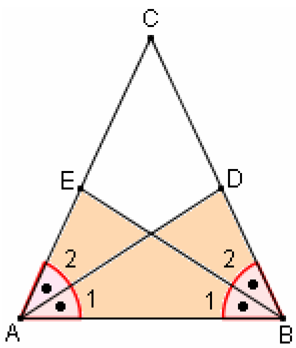
TH
$\overline{CA} = \overline{CB}$

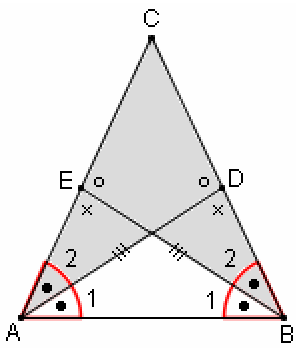
♥ Il teorema che stiamo esaminando
viene sovente enunciato dagli studenti
in modo maldestro:
"Se un triangolo ha *gli angoli alla base*
uguali, allora è isoscele".
Eh no, così non va: se si parla fin dall'inizio di "angoli alla base",
sembra che sia già noto *in partenza* che il triangolo è isoscele !!!

♥ NOTA - L'uso delle CATENE
è frequentissimo nelle dimostrazioni.
In una catena ben impostata,
ciascun "anello" dev'essere ricavato
A PARTIRE DALL' "ANELLO" CHE
LO PRECEDE IMMEDIATAMENTE.



DIMOSTRAZIONE





Costruzione:
tracciamo le bisettrici $\overline{AD}, \overline{BE}$ degli angoli $\hat{CAB}$ e $\hat{CBA}$, che sono uguali per HP.
I **quattro angoli** $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ che così si formano sono **tutti uguali fra loro**,
perché metà di angoli uguali, come possiamo illustrare con la catena seguente:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{CAB} = \frac{1}{2}\hat{CBA} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \quad \text{(NOTA in alto)}$$

Confrontiamo ora **i due triangoli** ABE, BAD.
Essi hanno: $\overline{AB}$ in comune; $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$; $\hat{CAB} = \hat{CBA}$
quindi sono uguali per il 2° Criterio,
e in particolare avranno $\overline{BE} = \overline{AD}$ e $\hat{AEB} = \hat{BDA}$.
Dall'ultima uguaglianza segue $\hat{CEB} = \hat{CDA}$ perché **supplementari di angoli uguali**:

$$\hat{CEB} = 180° - \hat{AEB} = 180° - \hat{BDA} = \hat{CDA} \quad \text{(NOTA in alto)}$$

Se a questo punto **confrontiamo i due triangoli ADC e BEC**,
potremo affermare che sono uguali per il 2° Criterio:
hanno infatti

- $\overline{AD} = \overline{BE}$;
- $\hat{CDA} = \hat{CEB}$;
- $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$

Ma dall'uguaglianza dei due triangoli ADC e BEC segue, in particolare,
$\overline{CA} = \overline{CB}$, cioè la tesi.

TEOREMI (corollari di teoremi precedenti)
- **Se un triangolo è equilatero (= ha tutti e tre i lati uguali fra loro),**
allora è equiangolo (= ha tutti e tre gli angoli uguali fra loro).
- **Se un triangolo è equiangolo, allora è equilatero**.

OSSERVAZIONE
I due teoremi (corollari) di cui sopra, che sono evidentemente uno l'inverso dell'altro,
potrebbero essere compendiati nell'unico enunciato:
"Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia equilatero, è che sia equiangolo"
oppure: *"un triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo"*