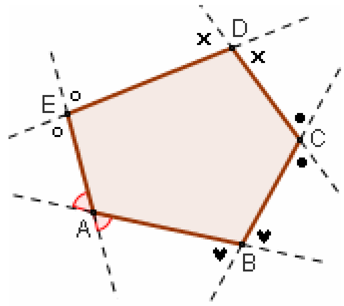
2.4 - IL TEOREMA DELL’ANGOLO ESTERNO IN FORMA DEBOLE

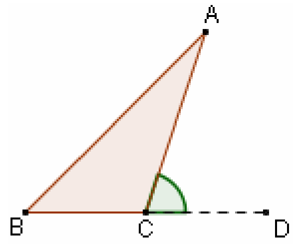
Gli “ANGOLI ESTERNI” di un poligono

In un poligono qualsiasi, si dicono “**angoli esterni**” **gli angoli adiacenti agli angoli interni**.

Quindi, in un poligono, a ciascun angolo interno corrispondono DUE angoli esterni, uguali fra loro perché opposti al vertice (vedi figura).

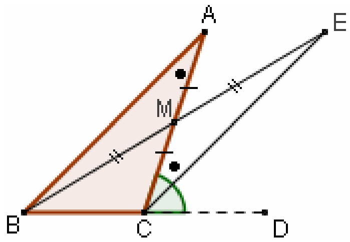


TEOREMA
(“TEOREMA DELL’ANGOLO ESTERNO in forma DEBOLE”)
In un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ad esso non adiacenti.



HP
ABC triangolo;
$\widehat{ACD}$ angolo esterno

TH
$\widehat{ACD} > \widehat{A}$;
$\widehat{ACD} > \widehat{B}$



A cosa è dovuto l’aggettivo “*debole*”? Al fatto che questo teorema sarà poi seguito da un altro, il “teorema dell’angolo esterno in forma *forte*”, per dimostrare il quale sono però necessari altri teoremi intermedi

DIM.

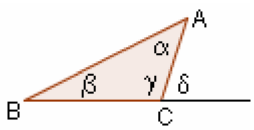
Effettuiamo le seguenti costruzioni (figura a destra): prendiamo il punto medio di $\overline{AC}$, indicandolo con M; tracciamo $\overline{BM}$ e prolunghiamo questo segmento di un segmento $\overline{ME} = \overline{BM}$; tracciamo la semiretta CE.

Ora, la semiretta CE è interna all’angolo $\widehat{ACD}$: questo fatto è il punto chiave del ragionamento dimostrativo. Che la semiretta CE sia interna ad $\widehat{ACD}$ è osservabile dal disegno, e l’intuizione porta facilmente a convincersi che ciò continuerebbe a esser vero anche se il triangolo avesse una forma diversa.
Tuttavia, il fatto che CE sia interna all’angolo $\widehat{ACD}$ andrebbe, a rigore, DIMOSTRATO.
La dimostrazione utilizzerebbe due assiomi che noi per evitare appesantimenti eccessivi non abbiamo citato: l’ “assioma dei semipiani” e un altro assioma riguardante le semirette aventi l’origine nel vertice di un angolo.
Ci limitiamo a segnalare questo fatto, senza scendere nei particolari.

Bene! Essendo la semiretta CE interna all’angolo $\widehat{ACD}$, è $\widehat{ACD} > \widehat{ACE}$. Ma i due triangoli BMA, EMC sono uguali per il 1° Criterio ($\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{ME}$ per costruzione, $\widehat{AMB} = \widehat{CME}$ perché opposti al vertice) e ne consegue, in particolare, che $\widehat{ACE} = \widehat{A}$.
Dunque, essendo $\widehat{ACD} > \widehat{ACE}$, è pure $\widehat{ACD} > \widehat{A}$ e la prima parte della tesi è dimostrata.

- Per la seconda parte ($\widehat{ACD} > \widehat{B}$) basterà prolungare $\overline{AC}$ dalla parte di C costruendo così il secondo dei due angoli esterni adiacenti all’angolo interno $\widehat{BCA}$ (che però sarà uguale ad $\widehat{ACD}$ in quanto suo opposto al vertice), poi prendere il punto medio N del lato $\overline{BC}$, tracciare la mediana $\overline{AN}$, prolungarla ecc. ecc.

COROLLARIO: In un triangolo, la somma di due angoli interni è sempre minore di un angolo piatto.



DIM. Per dimostrare che, ad esempio, $\alpha + \gamma < 180°$, basta tener presente che, per il Teorema dell’Angolo Esterno, si ha $\delta > \alpha$ quindi $\alpha < \delta$; ma allora $\alpha + \gamma < \delta + \gamma = 180°$.
Per le altre somme $\alpha + \beta$ e $\beta + \gamma$, ci si servirà ogni volta dell’angolo esterno opportuno.

COROLL.: In un triangolo, non possono esserci due angoli retti, né due ottusi, né un retto e un ottuso.

DIM. Infatti, in ciascuno dei tre casi prospettati, la somma dei due angoli interni in questione uguaglierebbe o supererebbe un angolo piatto, il che è assurdo in virtù del corollario precedente.

COROLLARI:
- **In un triangolo che abbia un angolo retto, i due angoli rimanenti sono acuti (= minori di 90°).**
- **In un triangolo con un angolo ottuso, i due angoli rimanenti sono acuti.**

LA CLASSIFICAZIONE DEI TRIANGOLI IN BASE AGLI ANGOLI

Da quanto detto, si trae che un triangolo può avere esclusivamente:
I) un angolo ottuso e due acuti (triangolo “ottusangolo”)
II) un angolo retto e due acuti (triangolo “rettangolo”)
III) tre angoli acuti (triangolo “acutangolo”).
Non possono verificarsi altri casi oltre a questi.