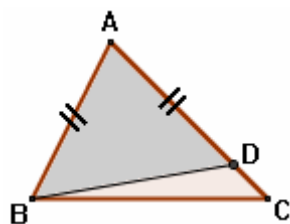


2.5 - DISUGUAGLIANZE FRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO

TEOREMA

Se un triangolo ha due lati disuguali, allora ha disuguali anche gli angoli ad essi opposti, e precisamente: a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.



$$\begin{array}{ll} \text{HP} & \overline{AC} > \overline{AB} \\ \text{TH} & \hat{B} > \hat{C} \end{array}$$

**GLI ESERCIZI (NON FACILI ...)
SULLE DISUGUAGLIANZE
SONO ALLE PAGINE
334 E 335**

DIM.

Siccome per ipotesi è $\overline{AC} > \overline{AB}$,

se noi prendiamo, sulla semiretta AC, un segmento $\overline{AD} = \overline{AB}$,
il punto D cadrà ALL'INTERNO del segmento $\overline{AC}$.

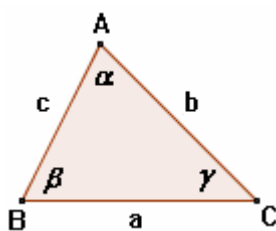
Ora:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{B} = \hat{ABC} & > & \hat{ABD} & & \hat{ADB} & > & \hat{C} \quad \text{quindi} \quad \boxed{\hat{B} > \hat{C}}, \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \hat{ABD} & & \text{il triangolo} & & \text{teorema} & \\ & \text{è solo} & & \text{ABD} & & \text{dell'angolo} & \\ & \text{una parte} & & \text{è isoscele} & & \text{esterno,} & \\ & \text{di } \hat{B} = \hat{ABC} & & \text{sulla base } \overline{BD} & & \text{triangolo BDC} & \end{array}$$

C.V.D.

TEOREMA

Se un triangolo ha due angoli disuguali, allora ha disuguali anche i lati ad essi opposti, e precisamente: ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore.



$$\begin{array}{ll} \text{HP} & \beta > \gamma \\ \text{TH} & b > c \end{array}$$

OSSERVAZIONE

Nella figura, abbiamo adottato una simbologia che è molto comune, e UTILISSIMA, in Geometria: abbiamo indicato

- i vertici del triangolo con A, B, C ;
- gli angoli aventi questi vertici RISPETTIVAMENTE con α, β, γ ;
- i lati opposti a questi vertici RISPETTIVAMENTE con a, b, c :
a opposto ad A, b opposto a B, c opposto a C.

DIM.

L'ipotesi è $\beta > \gamma$; vogliamo dimostrare (tesi) che è $b > c$.

Per assurdo, o, se si preferisce, per esclusione:

♪ se fosse $b < c$, allora, per il teorema precedente, si dovrebbe avere $\beta < \gamma$, contro l'ipotesi;

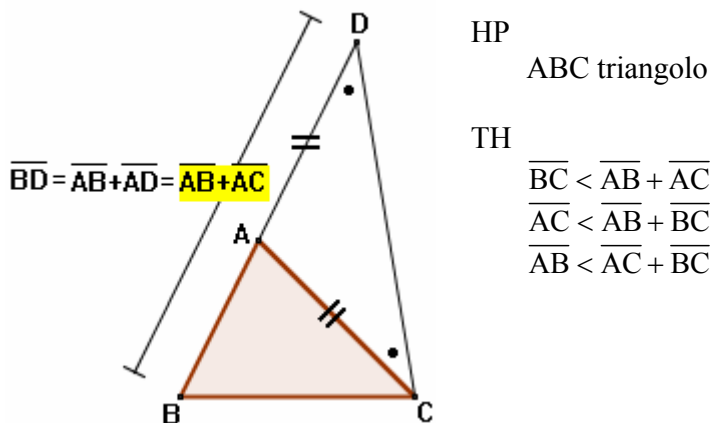
♪ se fosse $b = c$, allora il triangolo sarebbe isoscele e risulterebbe $\beta = \gamma$, contro l'ipotesi.

Non potendo essere né $b < c$, né $b = c$, dovrà per forza essere $b > c$,

C.V.D.

COROLLARI:

- In un triangolo rettangolo, il lato maggiore fra tutti è l'ipotenusa.
- In un triangolo ottusangolo, il lato maggiore è quello opposto all'angolo ottuso.

TEOREMA (“DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE”)**In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due.**

Nella dimostrazione di questo teorema emerge in modo particolarmente evidente

IL METODO “TOP-DOWN”

ossia, letteralmente,

“DALLA CIMA VERSO IL BASSO”.

Si parte dall’obiettivo da raggiungere, e ci si domanda:
di quali obiettivi intermedi avremmo bisogno per raggiungere questo obiettivo finale?
Poi il processo può essere eventualmente iterato (= ripetuto), applicandolo anche agli obiettivi intermedi.

DIM.

Dimostriamo che $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$;

per provare le altre due disuguaglianze si può procedere in modo analogo.

Vogliamo innanzitutto **COSTRUIRE** un segmento che sia uguale alla somma $\overline{AB} + \overline{AC}$, e lo faremo prolungando $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{AC}$.

Avremo appunto $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

A questo punto si tratta di dimostrare che $\overline{BC} < \overline{BD}$.

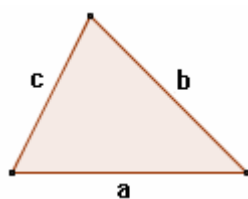
E a tale scopo, se riuscissimo a far vedere che nel triangolo BCD, fra i due angoli $\widehat{BCD}$ e $\widehat{D}$, il primo è maggiore del secondo, saremmo a posto in virtù del teorema precedente.

Ma ben facile provare che $\widehat{BCD} > \widehat{D}$!

Infatti $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$ perché $\widehat{ACD}$ è solo una parte di $\widehat{BCD}$;

e $\widehat{ACD} = \widehat{D}$ perché angoli alla base di un triangolo che è isoscele per costruzione.

La tesi è quindi dimostrata.

TEOREMA**In un triangolo, ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due.**

HP E' dato un triangolo di lati a, b, c
(supponiamo per comodità di aver indicato con a il lato maggiore, con b l'intermedio, con c il minore; insomma, supponiamo $a \geq b \geq c$)

TH

I) $a > b - c$
II) $b > a - c$
III) $c > a - b$

DIM.

Le tre disuguaglianze della tesi seguono dalle tre disuguaglianze la cui verità è assicurata dal teorema precedente.

Questo, infatti, ci dice che :

$$a < b + c;$$

$$b < a + c;$$

$$c < a + b.$$

Prendiamo, ad esempio, $a < b + c$.

Se in questa disuguaglianza noi sottraiamo lo stesso segmento c da entrambi i membri, ne ricaveremo:

$$a - c < b + c - c \quad \text{ossia} \quad a - c < b,$$

quindi (leggendo come gli Arabi, da destra a sinistra), $b > a - c$, che è la tesi II).

Analogamente,

la tesi I) si può dedurre a partire da $b < a + c$ sottraendo c da entrambi i membri;

e infine la tesi III) segue dalla $a < b + c$ sottraendo b da entrambi i membri.

Questo teorema è a volte denominato “della disuguaglianza triangolare inversa”. Riunendo i due enunciati di questa pagina, abbiamo che “in ogni triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza”.