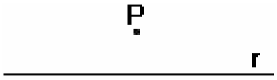
Cap. 3:   PERPENDICOLARI E PARALLELE

3.1 - RETTE PERPENDICOLARI

IL PROBLEMA DELL' ESISTENZA DELLA PERPENDICOLARE

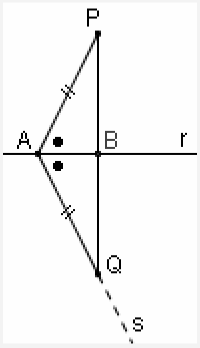
Dati un punto P *e una retta* r, *esiste sempre una retta che passi per* P *e sia perpendicolare a* r ?



L'intuizione ci dice: "Senz'altro, sì".
L' "esistenza della perpendicolare per un punto dato a una retta data"
potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.
*Ma ciò non è necessario: infatti tale esistenza è **dimostrabile come teorema**. Vediamo in che modo.*

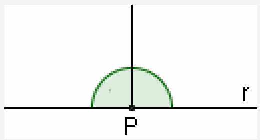
TEOREMA (Esistenza della Perpendicolare per un punto dato a una retta data)
Dati un punto P e una retta r, esiste sempre una retta che passi per P e sia perpendicolare a r.

❑ Primo caso: $P \notin r$



Prendiamo sulla r un qualsiasi punto A,
e congiungiamo P con A.
Se fortuitamente accade che la retta PA
risulti perpendicolare a r, siamo già a posto;
in caso contrario, costruiamo
nel semipiano di origine r, e non contenente P,
una semiretta s che formi un angolo $s\widehat{A}r = P\widehat{A}r$
(semiretta sicuramente esistente
per l'assioma del trasporto dell'angolo)
e su di essa prendiamo un segmento $\overline{AQ} = \overline{AP}$
(assioma del trasporto di un segmento).
Se a questo punto tracciamo la retta PQ,
essa sarà perpendicolare a r !!!
Infatti il triangolo APQ è isoscele per costruzione,
e il segmento $\overline{AB}$ (giacente su r),
che per costruzione fa da bisettrice per l'angolo al vertice $P\widehat{A}Q$,
è, per un teorema noto, anche altezza, quindi è perpendicolare a PQ.

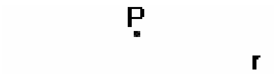
❑ Secondo caso: $P \in r$



Se il punto P appartiene alla retta r,
l'esistenza della perpendicolare a r per P
è assicurata dall'assioma
di divisibilità indefinita degli angoli,
secondo cui un angolo si può suddividere
in un numero a piacere n di parti uguali.
Infatti, in particolare, questo assioma
assicura (n=2) l'esistenza della *bisettrice*
di un angolo dato qualsiasi.
Ora, la bisettrice dell'angolo piatto che
in figura abbiamo segnato con l'archetto,
forma due angoli retti con r,
quindi è perpendicolare ad r.

IL PROBLEMA DELL' UNICITA' DELLA PERPENDICOLARE

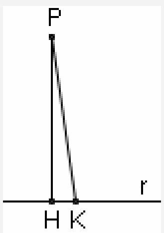
Dati un punto P *e una retta* r,
di rette passanti per P *e perpendicolari a* r *ce n'è una sola o ce n'è più d'una* ?



L'intuizione ci dice: "Senz'altro, una sola".
L' "unicità della perpendicolare per un punto dato a una retta data"
potrebbe quindi essere assunta come nuovo assioma.
*Ma ciò non è necessario: infatti tale unicità è **dimostrabile come teorema**. Vediamo in che modo.*

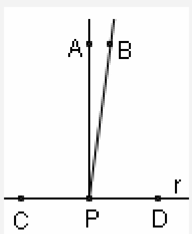
TEOREMA (Unicità della Perpendicolare per un punto dato a una retta data)
Dati un punto P e una retta r, la perpendicolare per P a r è unica.

❑ Primo caso: $P \notin r$



Se, per assurdo,
di perpendicolari da P a r
ve ne fosse più d'una,
allora il triangolo PHK individuato
da due di queste perpendicolari
e dalla retta r
avrebbe due angoli retti …
ma un teorema già dimostrato (par. 2.4)
afferma che in un triangolo
più di un angolo retto non può esserci.

❑ Secondo caso: $P \in r$



Se, per assurdo,
di perpendicolari per P a r
ve ne fosse più d'una,
allora, dette PA, PB
due di tali perpendicolari,
l'angolo piatto $C\widehat{P}D$ avrebbe
due distinte bisettrici,
mentre sappiamo (par. 2.3)
che la bisettrice di un angolo
è unica.