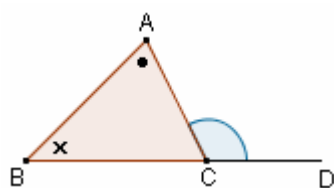


3.4 - QUESTIONI RELATIVE AGLI ANGOLI DEI TRIANGOLI E DEI POLIGONI

TEOREMA (TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO IN FORMA FORTE)

In un triangolo, ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti.

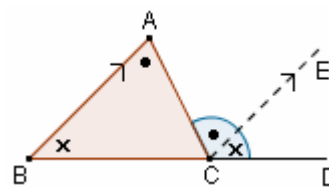


HP $\widehat{ACD}$ angolo esterno di ABC

TH $\widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B}$

DIMOSTRAZIONE

Per il vertice C dell'angolo esterno $\widehat{ACD}$ tracciamo la parallela CE al lato AB. Ora:
 $\widehat{ACE} = \widehat{A}$ perché alterni interni rispetto alle parallele AB, CE con la trasversale AC;
 $\widehat{ECD} = \widehat{B}$ perché corrispondenti rispetto alle parallele AB, CE con la trasversale BD.
 Dunque $\widehat{ACD} = \widehat{ACE} + \widehat{ECD} = \widehat{A} + \widehat{B}$, C.V.D.



Abbiamo messo le freccette per indicare il parallelismo. Comunque, queste freccette non sono "obbligatorie"!

Capito ora perché si dimostra prima un teorema dell'Angolo Esterno "debole" e solo più tardi uno "forte"? Perché il teorema DEBOLE serve per dimostrare i teoremi sulle RETTE PARALLELE, ed è tramite questi ultimi che si riesce poi a dimostrare il teorema FORTE.

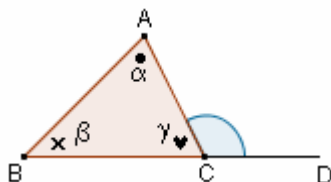
TEOREMA In un triangolo, la somma dei tre angoli interni è uguale a un angolo piatto (180°).

DIMOSTRAZIONE

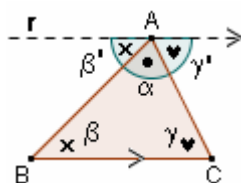
Si può dimostrare come corollario del teorema precedente:

$$\alpha + \beta + \gamma = \widehat{ACD} + \gamma = \widehat{BCD} = 180^\circ$$

teorema angolo est. "forte"



... oppure si può dimostrare come teorema a sé stante. Per un vertice qualsiasi (noi abbiamo preso il vertice A) si traccia la parallela r al lato opposto, dopodiché si ha:



$$\begin{aligned} \beta &= \beta' \quad (\text{alt. int., } r \parallel BC, \text{ trasv. } AB) \\ \gamma &= \gamma' \quad (\text{alt. int., } r \parallel BC, \text{ trasv. } AC) \\ \text{dunque } \alpha + \beta + \gamma &= \alpha + \beta' + \gamma' = 180^\circ \end{aligned}$$

COROLLARI

- I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari (cioè, danno per somma 90°)
- In un triangolo equilatero, ogni angolo è uguale alla terza parte di un angolo piatto ($= 60^\circ$)
- Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due angoli, avranno uguale anche l'angolo rimanente

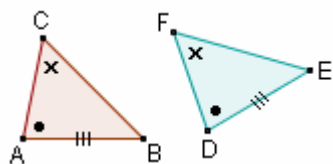
Quest'ultimo corollario si giustifica "per differenza rispetto a 180° ":

se, nei due tr. ABC e A'B'C', si ha $\widehat{A}' = \widehat{A}$ e $\widehat{B}' = \widehat{B}$, allora $\widehat{C}' = 180^\circ - \widehat{A}' - \widehat{B}' = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{C}$

TEOREMA (Secondo Criterio Generalizzato di uguaglianza dei triangoli)

Se due triangoli hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli, e i due angoli sono, nei triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale, allora quei due triangoli sono uguali.

Infatti, in tal caso, si potranno applicare: prima, il corollario precedente, poi, l'ordinario Secondo Criterio.



Prendiamo i due triangoli della figura: essi hanno rispettivamente uguali un lato e due angoli, e questi sono, nei due triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale (in entrambi i casi, uno dei due angoli è adiacente, l'altro opposto).

In virtù del corollario precedente, possiamo dire subito che $\widehat{B} = \widehat{E}$

(d'altronde, direttamente: $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{D} - \widehat{F} = \widehat{E}$)

dopodiché potremo concludere che i due triangoli sono uguali per l'ordinario 2° Criterio, avendo rispettivamente uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti.

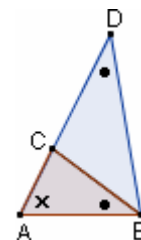
OSSERVAZIONE - E' davvero ESSENZIALE che i due angoli siano

"nei due triangoli, disposti allo stesso modo rispetto al lato uguale".

Consideriamo infatti la figura qui a destra:

In essa, i due triangoli ABC, ABD hanno rispettivamente uguali un lato ($\overline{AB}$, che è in comune) e due angoli ($\widehat{A}$ che è in comune; $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$), ma NON sono, evidentemente, uguali. Il fatto è che, nel triangolo ABC, i due angoli in questione sono I DUE ADIACENTI al lato $\overline{AB}$, mentre in ABD gli angoli sono UNO ADIACENTE, L'ALTRO OPPOSTO ad $\overline{AB}$.

Il teorema non è applicabile.

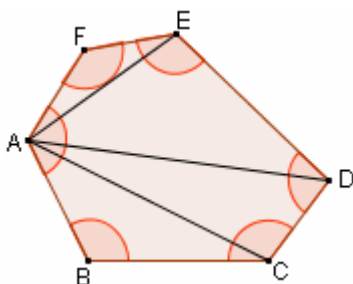


TEOREMA

La SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO convesso è uguale a tanti angoli piatti, quant'è il numero dei lati diminuito di 2.

Ad esempio, la somma degli angoli interni di un esagono è $(6-2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.
In generale, **la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $(n-2) \cdot 180^\circ$.**

Per la dimostrazione, si può procedere in due modi. Quale preferisci?

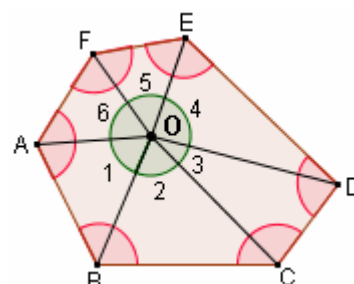


Ecco un esagono ABCDEF.

Se si prende un vertice qualsiasi (noi abbiamo preso A) e lo si congiunge con i vertici non consecutivi, si ottengono 4 triangoli (tanti quanti sono i lati che NON hanno un estremo in A, ossia $6-2 = 4$ triangoli).

Si può osservare che la somma degli angoli interni di ABCDEF è uguale alla somma degli angoli interni di tutti e 4 questi triangoli, dunque vale $(6-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

In generale, se i lati fossero stati n anziché 6, avremmo ottenuto $(n-2) \cdot 180^\circ$.



Ecco un esagono ABCDEF.

Se si prende un punto interno qualsiasi O e lo si congiunge con i vertici, si ottengono 6 triangoli (tanti quanti sono i lati).

Si può osservare che la somma degli angoli interni di ABCDEF è uguale alla somma degli angoli interni di tutti e 6 questi triangoli, diminuita però dell'angolo giro di vertice O.

Dunque tale somma vale:

$$6 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 6 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = (6-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

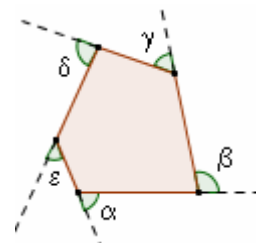
In generale, se i lati fossero stati n anziché 6, avremmo ottenuto $(n-2) \cdot 180^\circ$.

COROLLARIO La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso vale 360° .

La SOMMA DEGLI ANGOLI ESTERNI DI UN POLIGONO

Poiché la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2) \cdot 180^\circ$, la somma degli angoli ESTERNI di un poligono di n lati misurerà $n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ = \cancel{n \cdot 180^\circ} - \cancel{n \cdot 180^\circ} + 360^\circ = 360^\circ$.

S'intende, in questo discorso, di contare, per ciascun vertice del poligono, UN SOLO angolo esterno fra i due opposti al vertice e uguali fra loro.



Resta così dimostrato il seguente

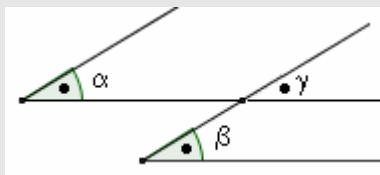
TEOREMA

Indipendentemente dal numero dei lati, la somma degli angoli ESTERNI di un poligono (prendendo un solo angolo esterno per ogni vertice) è sempre uguale ad un angolo giro (360°).

COPPIE DI ANGOLI COI LATI PARALLELI

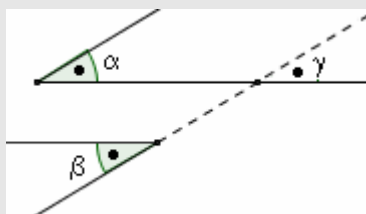
TEOREMA

Due angoli coi lati paralleli e concordi, oppure paralleli e discordi, sono uguali. Invece due angoli che abbiano due lati paralleli e concordi, e gli altri due paralleli e discordi, sono supplementari.



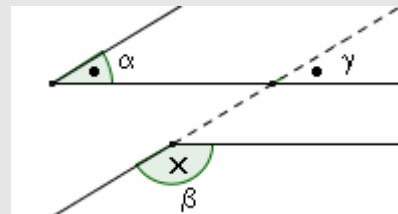
α, β hanno i **lati $\parallel$ e concordi**.
 γ fa da "angolo ausiliario",
fa da "ponte" fra α e β :

$\alpha = \gamma$ (corrispondenti, due parallele con trasversale)
 $\gamma = \beta$ (corrispondenti, due parallele con trasversale)



α, β hanno i **lati $\parallel$ e discordi**.
 γ fa da "ponte"
per la dimostrazione:

$\alpha = \gamma$ (corrispondenti, due parallele con trasversale)
 $\gamma = \beta$ (alterni esterni, due parallele con trasversale)



α, β hanno **due lati $\parallel$ e concordi**,
e gli altri due $\parallel$ e discordi.

$\alpha = \gamma$ (corrispondenti, due parallele con trasversale)
 $\gamma = 180^\circ - \beta$ (coniug. esterni, due parallele con trasversale)