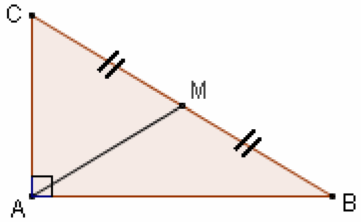
3.6 - ALCUNI TEOREMI SUL TRIANGOLO RETTANGOLO

TEOREMA
In un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa.

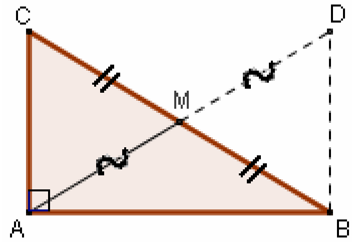


HP:
$C\widehat{A}B = 90°;\ \overline{BM} = \overline{MC}$

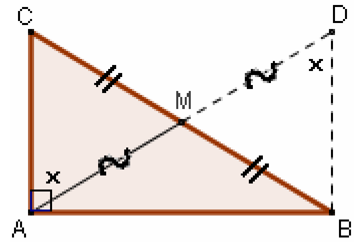
TH:
$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}\ \left(= \overline{BM} = \overline{MC}\right)$

DIM.

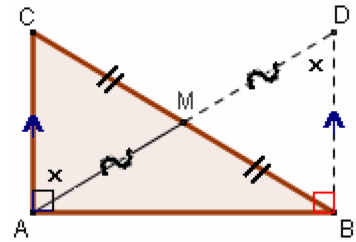
Costruzione:
prolungo la mediana $\overline{AM}$ di un segmento $\overline{MD} = \overline{AM}$.
Congiungo D con B.



I due triangoli AMC e DMB sono uguali per il 1° Criterio:
$\overline{MC} = \overline{BM}$ per ipotesi,
$\overline{AM} = \overline{MD}$ per costruzione,
$A\widehat{M}C = D\widehat{M}B$ perché opposti al vertice.
Quindi, in particolare, si ha $C\widehat{A}M = \widehat{D}$.

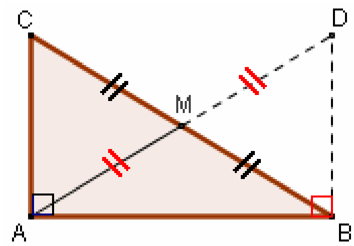


E poiché $C\widehat{A}M$ e $\widehat{D}$
sono in posizione di alterni interni
rispetto alle due rette BD e AC con la trasversale AD,
dal fatto che siano uguali si deduce che $BD \parallel AC$.
Ma allora, essendo $C\widehat{A}B = 90°$,
sarà retto anche $D\widehat{B}A$.

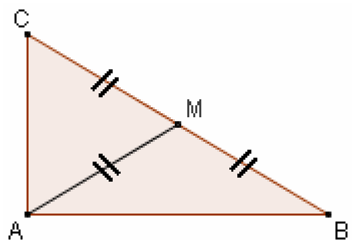


Se adesso confrontiamo i due triangoli ABC e ABD, vediamo che hanno
$C\widehat{A}B = D\widehat{B}A = 90°$; $\overline{AB}$ in comune;
$\overline{AC} = \overline{BD}$ per l'uguaglianza $AMC = DMB$
dunque sono uguali per il 1° Criterio e in particolare $\overline{BC} = \overline{AD}$.

E perciò $\boxed{\overline{AM}} = \overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \boxed{\frac{1}{2}\overline{BC}} = \overline{BM} = \overline{MC}$, C.V.D.



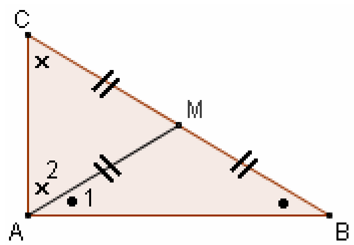
TEOREMA
Se in un triangolo la mediana relativa ad un lato è metà del lato stesso, allora quel triangolo è rettangolo (e il lato in questione ne è l'ipotenusa).



HP: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC}$

TH: $C\widehat{A}B = 90°$

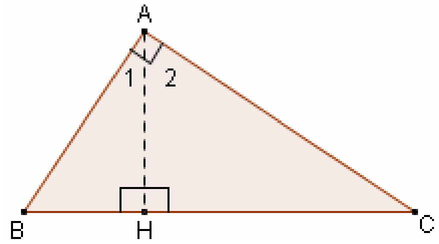
DIMOSTRAZIONE
I triangoli AMB, AMC sono isosceli per HP;
segue (vedi figura qui a fianco)
$\widehat{A}_1 = \widehat{B},\ \widehat{A}_2 = \widehat{C}$.
Ma la somma di tutti e quattro gli angoli
$\widehat{A}_1,\ \widehat{B},\ \widehat{A}_2,\ \widehat{C}$ dà 180°;
quindi la somma $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$
(che costituisce poi l'angolo $\widehat{A}$)
darà $180°/2 = 90°$.



Schematicamente:
$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180°$
$2\widehat{A}_1 + 2\widehat{A}_2 = 180°$
$2\left(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2\right) = 180°$
$\underbrace{\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2}_{\widehat{A}} = 90°$ C.V.D.

♥ Gli studenti tendono ad enunciare l'ultimo teorema in modo scorretto, dicendo che "se in un triangolo la mediana relativa *all'ipotenusa* è metà dell'ipotenusa stessa, allora il triangolo è rettangolo". … Eh, no! Se si utilizza fin dall'inizio il termine "ipotenusa", sembra che sia noto *già in partenza* che il triangolo è rettangolo!

TEOREMA
Se in un triangolo rettangolo si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa, questa lo suddivide in due triangoli, simili fra loro e con quello di partenza (due triangoli sono "simili" quando hanno gli angoli rispettivamente uguali).



HP
ABC rettangolo in $\widehat{A}$
$AH \perp BC$

TH
ABC, AHB, AHC hanno gli angoli rispettivamente uguali

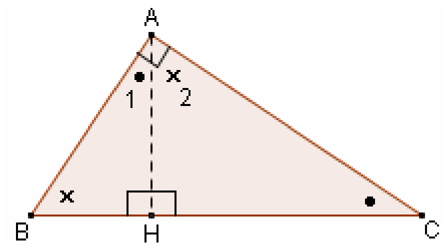
DIM.
Il triangolo ABH è rettangolo in $\widehat{H}$, dunque i suoi due angoli acuti $\widehat{B}$ e $\widehat{A}_1$ sono complementari.
Ma anche $\widehat{A}_2$ è complementare di $\widehat{A}_1$: dunque $\widehat{A}_2 = \widehat{B}$ perché complementari dello stesso angolo $\widehat{A}_1$.

$$\boxed{\widehat{A}_2} \underset{\substack{\widehat{A}_1+\widehat{A}_2=\\ =B\widehat{A}C=90°}}{\underset{\downarrow}{=}} 90° - \widehat{A}_1 \underset{\substack{\text{angoli acuti}\\ \text{del triangolo}\\ \text{rettangolo}\\ \text{AHB}}}{\underset{\downarrow}{=}} \boxed{\widehat{B}}$$

Analogamente, $\widehat{A}_1 = \widehat{C}$ perché complementari dello stesso angolo $\widehat{A}_2$.

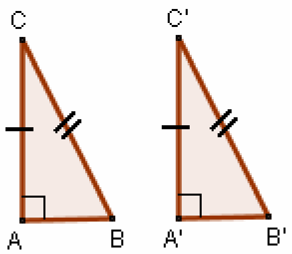
$$\boxed{\widehat{A}_1} \underset{\substack{\widehat{A}_1+\widehat{A}_2=\\ =B\widehat{A}C=90°}}{\underset{\downarrow}{=}} 90° - \widehat{A}_2 \underset{\substack{\text{angoli acuti}\\ \text{del triangolo}\\ \text{rettangolo}\\ \text{AHC}}}{\underset{\downarrow}{=}} \boxed{\widehat{C}}$$

La situazione è pertanto quella illustrata nella figura qui a fianco.
La tesi è dimostrata!
I tre triangoli ABC, AHB, AHC hanno gli angoli rispettivamente uguali (ognuno dei tre ha un angolo retto, un angolo "pallino" e un angolo "crocetta"): sono dunque "simili".



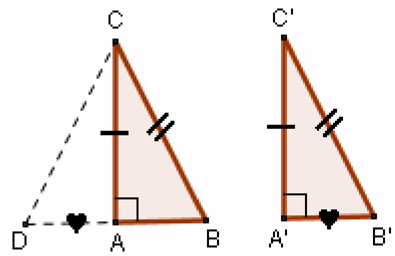
TEOREMA ("Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli")
Se due triangoli rettangoli hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto, allora sono uguali.

OSSERVAZIONE
Notare che in questo teorema si suppone l'uguaglianza di due lati e di un angolo, ma quest'ultimo …
… non è l'angolo compreso.
Si tratta perciò di un teorema *nuovo*, non coincidente con nessuno dei tre Criteri di uguaglianza già noti.



HP
$B\widehat{A}C = B'\widehat{A'}C' = 90°$
$\overline{BC} = \overline{B'C'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}$

TH
$ABC = A'B'C'$



♥ Nei testi in Inglese, questo enunciato è denominato "**the Hypotenuse-Leg Theorem**".
Side = lato
Leg = cateto

DIM.
Prolunghiamo il segmento $\overline{AB}$, dalla parte di A, di un segmento $\overline{AD} = \overline{A'B'}$.
Confrontando adesso i due triangoli ADC, $A'B'C'$, vediamo che sono uguali per il Primo Criterio (l'angolo $D\widehat{A}C$ è evidentemente retto perché supplementare dell'angolo retto $B\widehat{A}C$).
Ma allora è, in particolare, $\overline{DC} = \overline{B'C'}$; era poi $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ per ipotesi, per cui si ha $\overline{DC} = \overline{BC}$. Dunque il triangolo BDC è isoscele; perciò $\overline{CA}$, che ne è altezza relativa alla base, farà anche da mediana: $\overline{AD} = \overline{AB}$.
Ma $\overline{AD}$ era stato costruito uguale ad $\overline{A'B'}$; ne consegue $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
E a questo punto, se andiamo a confrontare i due triangoli ABC e $A'B'C'$, li possiamo dire uguali per il Primo Criterio (o per il Terzo, indifferentemente).
La tesi è dimostrata.