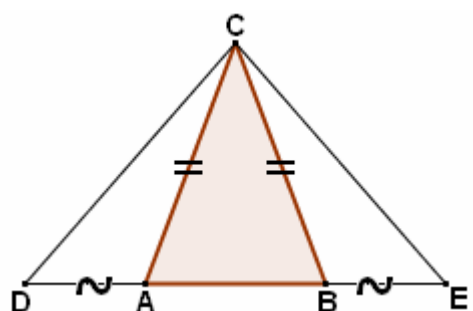


GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 2

1) (Esercizio svolto)

Sui due prolungamenti della base $\overline{AB}$ di un triangolo isoscele ABC si prendano due segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE}$.
Dimostrare che il triangolo CDE è anch'esso isoscele.



Si segna SUBITO sul disegno ciò che è noto per IPOTESI !!!

HP
(=IPOTESI)

$$\overline{CA} = \overline{CB}$$

$$\overline{AD} = \overline{BE}$$

(NOTA)

TH
(=TESI)

$$\overline{CD} = \overline{CE}$$

NOTA

A rigore, occorrerebbe anche specificare, nell'ipotesi, che $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ si trovano sui PROLUNGAMENTI di $\overline{AB}$.

Per indicare questo, si potrebbe scrivere, ad esempio, $\widehat{DAB} = \widehat{ABE} = 180^\circ$.

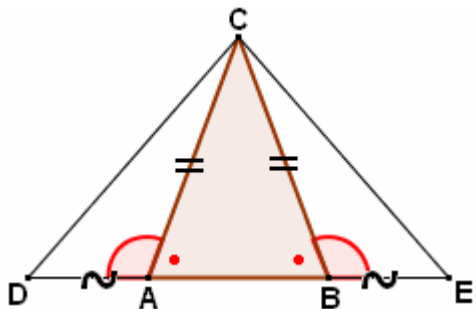
Tuttavia, per brevità, si possono lasciare sottintese precisazioni di questo genere.

DIMOSTRAZIONE

Innanzitutto, poiché per HP il triangolo ABC è isoscele sulla base $\overline{AB}$, si ha $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$ (in un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono uguali).

Allora i due angoli $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBE}$ sono uguali perché supplementari di angoli uguali:

$$\widehat{CAD} = 180^\circ - \widehat{CAB} = 180^\circ - \widehat{CBA} = \widehat{CBE}.$$



Convieni segnare sul disegno, se si ritiene possa essere utile, ciò che progressivamente viene dedotto!!!

Confrontiamo ora i due triangoli CAD , CBE .

Essi hanno:

$$\overline{CA} = \overline{CB} \text{ per HP;}$$

$$\overline{AD} = \overline{BE} \text{ per HP;}$$

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$$

quindi sono uguali per il 1° Criterio.

In particolare, avranno $\overline{CD} = \overline{CE}$,
C.V.D.

(ossia: Come Volevasi Dimostrare)

Ti consiglio di
scrivere sempre l'ipotesi e la tesi.

**SUL DISEGNO, TI CONVERRÀ'
SEGNARE IMMEDIATAMENTE
CIO' CHE E' NOTO PER IPOTESI**



(marcherai con simboli uguali i segmenti e gli angoli che sai per ipotesi essere uguali, indicherai con quadratini gli angoli che sai per ipotesi essere retti, ecc. ecc.)

La tesi, invece, è meglio non segnlarla:
essa è il tuo obiettivo ultimo,
esprime qualcosa che non "possiedi" ancora,
qualcosa che ti è richiesto di "conquistare"
con ragionamenti vari.

Soltanto al termine potrai finalmente dire:
Evviva! Ci sono riuscito! La tesi è dimostrata!
E a questo punto, se lo desideri,
la rimarcherai vittoriosamente in figura.

**APPENA DEDUCI QUALCOSA
CHE TI SEMBRA RILEVANTE,
EVIDENZIALO SUBITO IN MATITA!**



Nel nostro esempio, è molto importante marcare (lo abbiamo fatto con la coppia di pallini) che sono uguali gli angoli alla base del triangolo isoscele ABC , perché vederne **raffigurata visivamente** l'uguaglianza è una "spinta" a dedurre l'uguaglianza dei due angoli al loro fianco (uguali perché supplementari di angoli uguali: e noi lo andiamo immediatamente a indicare coi due archetti). Adesso, il fatto che i triangoli CAD e CBE siano uguali ci è suggerito dal disegno! (2 lati e l'angolo compreso, 1° Criterio)

Un'ultima raccomandazione:
**evita accuratamente di tracciare una figura
che esprima un caso particolare.**



Nel nostro esempio, sarebbe un caso particolare se il triangolo ABC venisse disegnato equilatero, oppure se i due prolungamenti della base fossero presi uguali ai lati obliqui, ecc.)

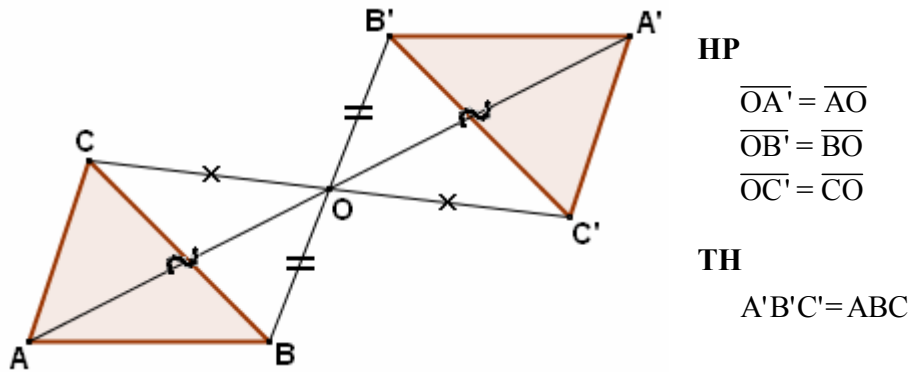
Beninteso: il teorema, essendo valido sempre, mantiene la sua validità anche nei vari casi particolari, ma utilizzando una figura che esprima un caso particolare c'è il pericolo di essere indotti a fare dei ragionamenti che "funzionano", appunto, solo in quel caso specifico, ma non in generale.

2) (Esercizio svolto)

Dato un triangolo ABC e un punto qualunque O fuori di esso,
si traccino i tre segmenti AO , BO e CO

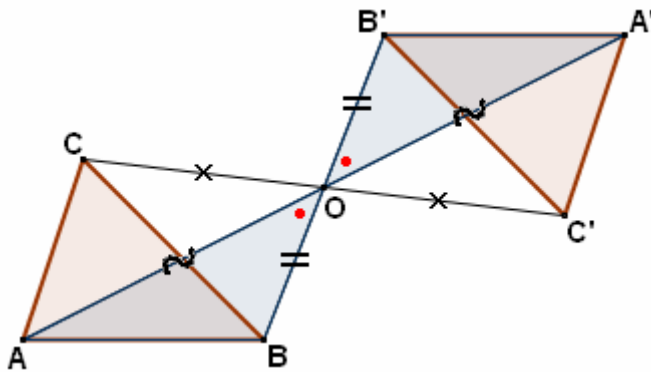
e li si prolunghi, rispettivamente, di tre segmenti $\overline{OA'} = \overline{AO}$, $\overline{OB'} = \overline{BO}$, $\overline{OC'} = \overline{CO}$.

- Dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ è uguale al triangolo ABC
- Questo teorema resterebbe valido anche se il punto O fosse interno al triangolo ABC ?



a) DIMOSTRAZIONE

Confrontiamo i due triangoli OAB , $OA'B'$.

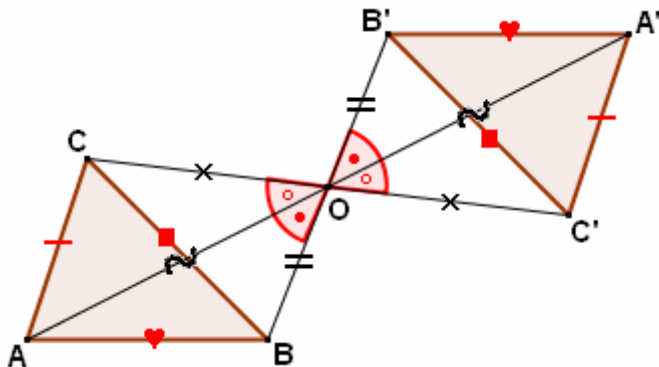


Essi hanno: $\overline{AO} = \overline{OA'}$ per HP; $\overline{BO} = \overline{OB'}$ per HP; $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ perché opposti al vertice quindi sono uguali per il 1° Criterio. In particolare, avranno $\boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'}}$.

Allo stesso modo,

confrontando i due triangoli OAC e $OA'C'$, si dimostra che $\boxed{\overline{AC} = \overline{A'C'}}$

e confrontando i due triangoli OBC e $OB'C'$, si dimostra che $\boxed{\overline{BC} = \overline{B'C'}}$



A questo punto, andando a confrontare i due triangoli ABC e $A'B'C'$, possiamo dire che sono uguali per il 3° Criterio (hanno infatti i tre lati rispettivamente uguali).

La tesi è dimostrata.

- Sì, il teorema resta valido anche se O è interno ad ABC , e la dimostrazione è identica.

SE VUOI LAVORARE BENE ... RICAPITOLIAMO:

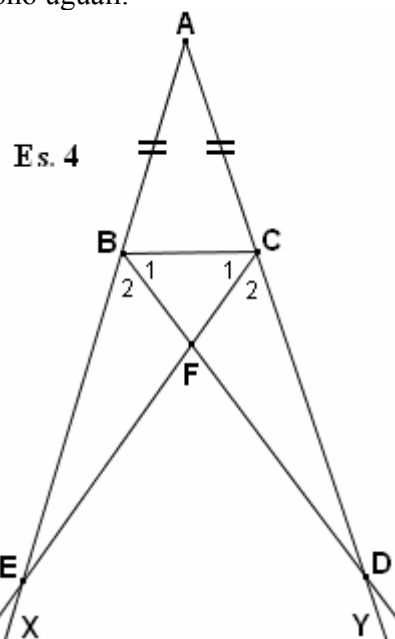
- ♪ **Segna sempre sulla figura ciò che dice l'ipotesi**
(marcando con simboli uguali i segmenti o gli angoli che si sa essere uguali, indicando con un quadratino gli angoli che si sa essere retti, ecc. ecc.)
- ♪ **... E quando riesci a dedurre qualche affermazione intermedia interessante, ti conviene sempre segnare anche quella sul disegno prima di proseguire!**
- ♪ **Evita accuratamente di tracciare una figura che esprima un caso particolare**
(ad es., se l'ipotesi parla di un triangolo isoscele, meglio non disegnarlo equilatero; se parla di un angolo generico, meglio non farlo retto, ecc.)

3) Dimostra che in un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali sono uguali.

4) **(Vedi figura)**

In un triangolo isoscele ABC , di base $\overline{BC}$,
si traccino i prolungamenti BX e CY (NOTA)
dei due lati obliqui $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e poi si tracci:
la bisettrice dell'angolo $\widehat{XBC}$, che tagli la semiretta CY in D ,
e la bisettrice dell'angolo $\widehat{YCB}$, che tagli BX in E .
Dimostrare che $\overline{BD} = \overline{CE}$ e che, detto F
il punto di intersezione di BD e CE , è pure $\overline{BF} = \overline{CF}$.

NOTA: I punti X e Y servono semplicemente per dare un nome alle due semirette che rappresentano i prolungamenti dei due lati obliqui: pertanto, tali punti X e Y non vanno presi in posizioni particolari, ma possono stare, su quelle semirette, dove si desidera.

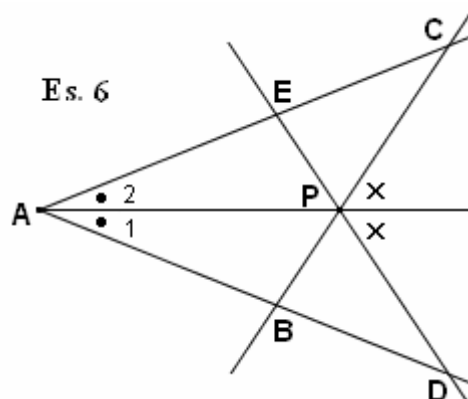


5) Se due triangoli hanno rispettivamente uguali
due lati e la mediana relativa a uno di essi,
allora sono uguali (*all'inizio della frase*
è sottinteso, evidentemente: "Dimostrare che ...").

6) **(Vedi figura)**

Per un punto P della bisettrice di un angolo $\widehat{A}$ si tracciano
due rette formanti angoli uguali con la bisettrice stessa
(sono quelli indicati con le crocette in figura).
Una di queste rette taglia i lati dell'angolo
rispettivamente in B e in C , l'altra taglia i medesimi lati
rispettivamente in D e in E . Dimostrare che si ha:

$$\text{I) } \overline{PB} = \overline{PE} \quad \text{II) } \overline{PD} = \overline{PC} \quad \text{III) } \overline{BC} = \overline{DE}$$



7) Il quadrilatero $ABCD$ è un "**deltoido**", ossia ha
la proprietà di avere due lati consecutivi uguali fra loro,
e gli altri due pure uguali fra loro: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{DA}$.
Dimostra che le sue diagonali sono perpendicolari.

8) Dimostra che se in un triangolo una mediana è anche altezza, allora il triangolo è isoscele.

9) Dimostra che se in un triangolo una bisettrice è anche altezza, allora il triangolo è isoscele.

10) Dimostra che se in un triangolo una bisettrice è anche mediana, allora il triangolo è isoscele
[Questo teorema, rispetto ai due precedenti, è più difficile da dimostrare,
perché non si può applicare nessuno dei tre Criteri di uguaglianza.

Ti do un'indicazione. Sia ABC il triangolo, e sia CM la mediana-bisettrice.

Prolunga CM dalla parte di M di un segmento $\overline{MD} = \overline{CM}$, poi congiungi D con A e con B ;
fai quindi delle considerazioni sui vari triangoli che compaiono ora in figura ...]

11) Dimostra che in due triangoli uguali le mediane relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali.

12) Dimostra che in due triangoli uguali le bisettrici relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali.

13) Spiega perché, a questo livello dello studio della Geometria, se tentiamo di dimostrare che

"in due triangoli uguali le altezze relative a due lati rispettivamente uguali sono uguali"

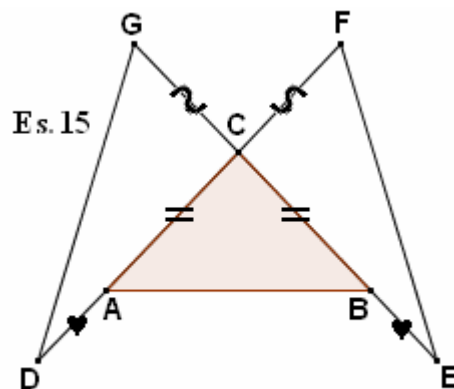
non ci può venire in aiuto nessuno dei tre Criteri di Uguaglianza dei Triangoli sin qui studiati.

... Ci si può però riuscire prolungando ogni altezza di un segmento ad essa uguale e congiungendo ...

14) In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali si tagliano in parti rispettivamente uguali.

15) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 332)

E' dato il triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$.
Si prolunghino i due lati obliqui $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$:
dalla parte della base, di due segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE}$,
e dalla parte del vertice di due altri segmenti uguali fra loro
(ma non necessariamente coi precedenti) $\overline{CF} = \overline{CG}$.
Dimostrare che le due congiungenti $\overline{DG}$, $\overline{EF}$ sono uguali.

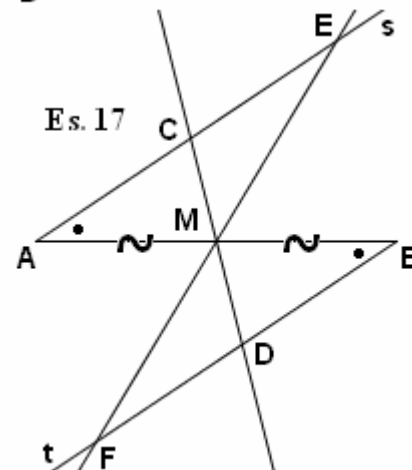


16) ☼ (Dimostrazione guidata a pag. 332)

Dimostrare che congiungendo i punti medi
dei tre lati di un triangolo isoscele,
si ottiene un nuovo triangolo isoscele.

17) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 332)

Sia $\overline{AB}$ un segmento e M il suo punto medio.
Da A e da B, da parte opposta rispetto ad AB,
si traccino due semirette, s e t,
che formino angoli uguali con AB.
Per M si traccino due rette qualsiasi,
la prima delle quali tagli s in C e t in D,
la seconda tagli s in E e t in F.
Dimostrare che:
 $\overline{AC} = \overline{BD}$; $\overline{CE} = \overline{DF}$

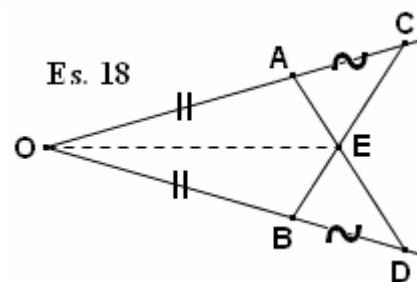


18) ☼ (Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 333)

Sui lati di un angolo qualunque di vertice O
si prendano rispettivamente i segmenti
 $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OC} = \overline{OD}$;
si indichi con E il punto in cui si intersecano
le congiungenti $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.
Dimostrare che:

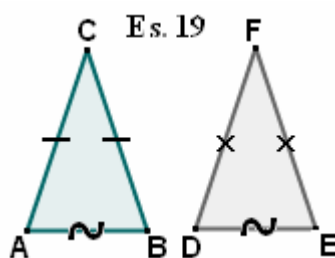
I) $\overline{AD} = \overline{BC}$ II) $\overline{EA} = \overline{EB}$

III) il punto E sta sulla bisettrice dell'angolo dato $\hat{O}$.



19) ☼ (Vedi figura;
dim. guidata a pag. 333)

Due triangoli isosceli
sono uguali
se hanno uguali
le basi
e i perimetri



HP $\overline{CA} = \overline{CB}$, $\overline{FD} = \overline{FE}$;
 $\overline{AB} = \overline{DE}$; $2p(ABC) = 2p(DEF)$

TH $ABC = DEF$

♥ Il simbolo più usato
per indicare il perimetro è $2p$;
 p si riserva invece di norma al
SEMIperimetro (= $\frac{1}{2}$ del perimetro).
Il perché è spiegato a pag. 335.

20) ☼ (Dimostrazione guidata a pag. 333)

Sui lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ del triangolo equilatero ABC si prendano tre segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$.
Dimostrare che il triangolo DEF è pure equilatero.

21) Se in un triangolo isoscele ABC si tracciano le bisettrici dei due angoli alla base $\hat{B}$ e $\hat{C}$,
allora, detto D il loro punto di incontro, la congiungente DA biseca l'angolo al vertice
(per "bisecare" si intende "tagliare in due parti uguali")

22) Se un quadrilatero ABCD ha i lati opposti a due a due uguali ($\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$) allora ha pure
gli angoli opposti a due a due uguali ($\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$): dimostrarlo (Psst: occorre tracciare una ...)

23) Il teorema seguente appare a prima vista simile al 5), ma è decisamente più complicato.

Dimostra che se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e la mediana relativa al terzo lato,
allora sono uguali. [Indicazione: prolunga ciascuna delle due mediane di un segmento ad essa uguale;
congiungi l'estremo libero di ciascun prolungamento con le estremità del lato cui la
mediana si riferisce; e utilizza, in successione: il 1° Criterio, il 3°, nuovamente il 1°]

☀ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

15) DIM.

⇒ I due triangoli DCG ed ECF hanno:

$$\begin{aligned}\overline{CG} &= \overline{CF} \text{ per } \dots\dots\dots; \\ \widehat{DCG} &= \widehat{ECF} \text{ perché } \dots\dots\dots; \\ \overline{CD} &= \overline{CE} \text{ perché } \dots\dots\dots \text{ (NOTA).}\end{aligned}$$

Quindi essi sono uguali per il ;
in particolare, $DG = EF$, c.v.d.

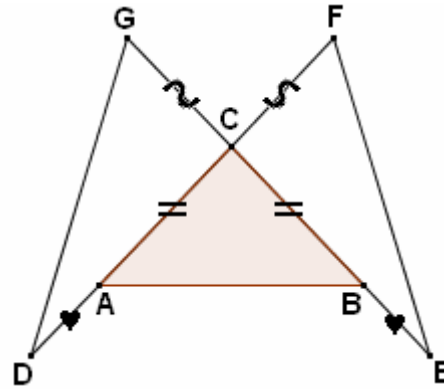
NOTA

Se si vuole **illustrare più in dettaglio**
quest'ultima affermazione, si potrà utilizzare:

a) una **catena**: $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \dots\dots + \dots\dots = \overline{CE}$

b) oppure una **somma membro a membro di due uguaglianze**:

$$\begin{array}{r} \overline{CA} = \dots\dots \\ \overline{AD} = \dots\dots \\ \hline \overline{CA + AD} = \dots\dots + \dots\dots \\ \overline{CD} \qquad \qquad \overline{CE} \end{array}$$



HP

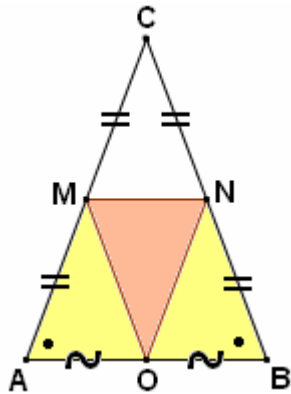
$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \overline{CB} \\ \overline{AD} &= \overline{BE} \\ \overline{CF} &= \overline{CG}\end{aligned}$$

TH

$$\overline{DG} = \overline{EF}$$

16)

⇒



HP

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

$$\begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{MC} \\ \overline{BN} = \overline{NC} \end{array} \text{ (NOTA)}$$

$$\overline{AO} = \overline{OB}$$

TH

$$\overline{OM} = \overline{ON}$$

NOTA :
sulla figura, abbiamo segnato direttamente
 $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{BN} = \overline{NC}$, "anticipando"
il semplice ragionamento secondo cui
metà di segmenti uguali sono uguali

DIM. Osserviamo innanzitutto che i 4 segmenti $\overline{AM}$, $\overline{MC}$, $\overline{BN}$, $\overline{NC}$
sono **TUTTI uguali fra loro (e non soltanto uguali a due a due)**, perché

$$\text{In dettaglio, infatti, possiamo scrivere } \overline{AM} = \overline{MC} = \frac{1}{2} \dots\dots = \frac{1}{2} \dots\dots = \overline{BN} = \overline{NC}.$$

Confrontiamo ora i due triangoli AOM e BON.

Essi hanno: $\overline{AM} = \overline{BN}$; $\overline{AO} = \overline{OB}$ per ; $\widehat{A} = \widehat{B}$ perché

Quindi AOM e BON sono uguali per il , e in particolare $\overline{OM} = \overline{ON}$, c.v.d.

17) DIM.

⇒ I) Confrontiamo i due triangoli AMC e BMD:

$\widehat{A} = \widehat{B}$ per ;
 $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ perché
(segna la loro uguaglianza
con due simboli identici in figura!);

$\overline{AM} = \overline{MB}$ per

Quindi è $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ per il ;
in particolare, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

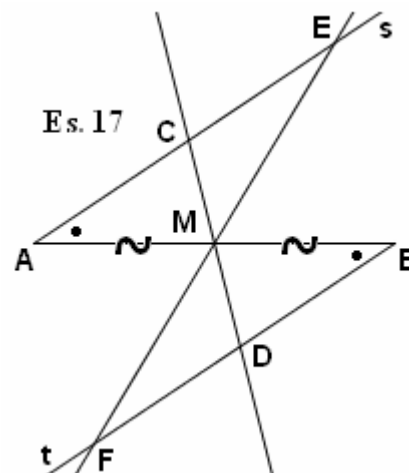
II) Dall'uguaglianza di AMC e BMD
prima dimostrata segue, fra l'altro, che
 $\overline{CM} = \overline{MD}$ e $\widehat{ACM} = \widehat{BDM}$

(segna queste uguaglianze sulla figura!)

Quindi, confrontando ora ECM e FDM, avremo

- $\overline{CM} = \overline{MD}$
- $\widehat{ECM} = \widehat{FDM}$ perché : la catena illustrativa è $\widehat{ECM} = 180^\circ - \dots\dots = 180^\circ - \dots\dots = \widehat{FDM}$
- $\widehat{EMC} = \widehat{FMD}$ perché

Pertanto $\widehat{ECM} = \widehat{FDM}$ per il e, in particolare, $\overline{CE} = \overline{DF}$. La dimostrazione è completata.



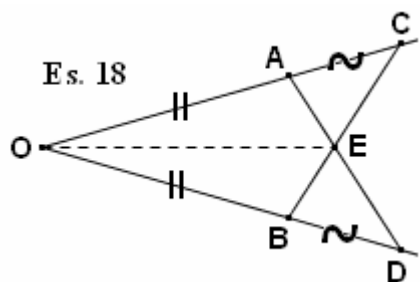
HP

$$\dots\dots\dots$$

TH

$$\begin{array}{l} \text{I) } \overline{AC} = \overline{BD} \\ \text{II) } \overline{CE} = \overline{DF} \end{array}$$

18)



Es. 18

HP

$$\overline{OA} = \overline{OB}, \overline{OC} = \overline{OD}$$

(in figura, per comodità, abbiamo già segnato $\overline{AC} = \overline{BD}$: “differenze di segmenti uguali sono uguali”; questa annotazione grafica permette anche, insieme all’altra relativa a $\overline{OA} = \overline{OB}$, di “ricostruire” immediatamente, per somma, l’uguaglianza nota $\overline{OC} = \overline{OD}$)

TH

I) $\overline{AD} = \overline{BC}$

II) $\overline{EA} = \overline{EB}$

III) il punto E sta sulla bisettrice di $\hat{O}$,
vale a dire, congiunto O con E, si ha $\hat{EOA} = \hat{EOB}$

DIM.

I) Confrontiamo OAD, OBC:

$$\overline{OA} = \overline{OB} \text{ (per);}$$

$$\overline{OD} = \overline{OC} \text{ (per);}$$

 $\hat{O}$ in comune.

Quindi $\triangle OAD = \triangle OBC$ (per il) e, in particolare, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

II) Innanzitutto dall’uguaglianza di OAD e OBC segue anche (*segna subito sulla figura!!!*)

$$\hat{BDE} = \hat{ACE} \text{ e } \hat{OAE} = \hat{OBE}.$$

Ma se $\hat{OAE} = \hat{OBE}$, allora anche $\hat{CAE} = \hat{DBE}$ perché :

la catena illustrativa è $\hat{CAE} = 180^\circ - \dots = \dots = \hat{DBE}$ (*segna sulla figura!!!*).

Quindi, confrontando i due triangoli AEC e BED, si ha che:

$$\hat{ACE} = \hat{BDE}; \hat{CAE} = \hat{DBE}; \overline{AC} = \overline{BD} \text{ perché : } \overline{AC} = \dots = \dots = \overline{BD}.$$

Di conseguenza, $\triangle AEC = \triangle BED$ per il e, in particolare, $\overline{EA} = \overline{EB}$.

III) OAE ed OBE sono uguali per il : infatti

$\overline{OE}$ è ; $\overline{OA} = \overline{OB}$ per ; $\overline{EA} = \overline{EB}$ come già dimostrato (*l’avevi segnato in figura?*).

Dall’uguaglianza dei due triangoli considerati segue, in particolare, $\hat{EOA} = \hat{EOB}$, c.v.d.

19)



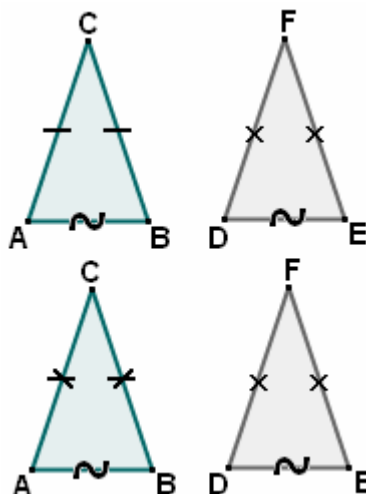
DIM.

Se sono uguali i perimetri e le basi,
saranno uguali anche i lati obliqui!

Infatti

$$\begin{aligned} \overline{CA} = \overline{CB} &= \\ = \frac{2p(ABC) - \dots}{2} &= \frac{2p(DEF) - \dots}{2} = \\ = \overline{FD} = \overline{FE} \end{aligned}$$

Annotate dunque
tali uguaglianze sulla figura, $\rightarrow$
potremo concludere che
i due triangoli considerati
sono uguali per il , c.v.d.



HP

$$\overline{CA} = \overline{CB}$$

$$\overline{FD} = \overline{FE}$$

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$2p(ABC) = 2p(DEF)$$

TH

$$ABC = DEF$$

20)



DIM.

Prima di tutto, si osserva che $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$
perché

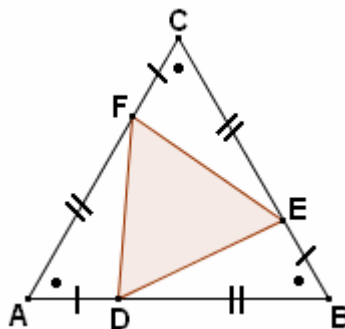
Inoltre, i tre segmenti $\overline{DB}$, $\overline{EC}$, $\overline{FA}$
sono uguali perché ;
infatti, schematicamente:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{BC} = \overline{CA} \\ \overline{AD} &= \overline{BE} = \overline{CF} \\ \overline{AB} - \overline{AD} &= \dots = \overline{CA} - \overline{CF} \\ \overline{DB} &= \dots = \overline{FA} \end{aligned}$$

Confrontiamo allora *simultaneamente* i tre triangoli ADF, BED e CFE.

Essi hanno $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$, $\overline{FA} = \overline{DB} = \overline{EC}$, , quindi sono uguali per il

e in particolare si ha $\overline{FD} = \overline{DE} = \overline{EF}$, C.V.D.



HP

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$$

TH

$$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$$