

GEOMETRIA: ESERCIZI SULLE DISUGUAGLIANZE

Ti proporrò ora, come esercizi, **alcuni teoremi in cui la tesi è rappresentata da una disuguaglianza.**

Ovviamente, per la dimostrazione dovrai

ricordare quei teoremi noti che riguardano disuguaglianze fra segmenti o fra angoli;

ad esempio:

- "in un triangolo, a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, e viceversa";
- "in un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza";
- "in un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti" (Teorema dell' Angolo Esterno in forma debole);
- ...

Molto sovente, in esercizi di questo tipo, occorrerà

applicare le **proprietà delle disuguaglianze fra segmenti o angoli,**

che abbiamo fissato come assiomi all'inizio del nostro studio della Geometria.

Le richiamiamo qui di seguito.

- Sommando membro a membro due disuguaglianze vere (e aventi lo stesso verso, cioè: o entrambe col < o entrambe col >) si ottiene ancora una disuguaglianza vera:
 $a < b \wedge c < d \rightarrow a + c < b + d$ (ovviamente, lo stesso vale se al posto di "<" scriviamo ">"...)
 - Invece *non* è lecito *sottrarre* membro a membro due disuguaglianze e quiverse: voglio dire, la disuguaglianza cui si perverrebbe potrebbe essere, a seconda dei casi, o vera o falsa!
- Moltiplicando, o dividendo, per uno stesso numero positivo ambo i membri di una disuguaglianza vera, si perviene ancora ad una disuguaglianza vera:
 $a < b \rightarrow 2a < 2b;$ (lo stesso vale se al posto di "<" scriviamo ">"; non staremo più a ripeterlo!)
 $a < b \rightarrow \frac{a}{2} < \frac{b}{2};$
 ...
 $a < b \rightarrow ma < mb;$
 $a < b \rightarrow \frac{1}{n}a < \frac{1}{n}b;$
 $a < b \rightarrow \frac{m}{n}a < \frac{m}{n}b$
- Aggiungendo, o sottraendo, uno stesso termine da entrambi i membri di una disuguaglianza vera, si ottiene ancora una disuguaglianza vera:
 $a < b \rightarrow a + c < b + c$
 $a < b \rightarrow a - c < b - c$

Dall'ultimo assioma citato si possono dedurre facilmente

♪ la cosiddetta "**regola del trasporto**":

"nell'ambito di una disuguaglianza, è lecito trasportare un termine di somma algebrica da un membro all'altro, cambiandolo però di segno"

$$d + e < f \rightarrow d < f - e \quad \left(d \not\leftarrow \boxed{e} < f \boxed{-e} \right)$$

♪ il "**principio di cancellazione**":

"nell'ambito di una disuguaglianza, se uno stesso termine (addendo di somma algebrica) compare tanto a primo quanto a secondo membro, è lecito cancellarlo"

$$g + h < i + h \rightarrow g < i \quad \left(g \not\leftarrow \boxed{h} < i \not\leftarrow \boxed{h} \right)$$

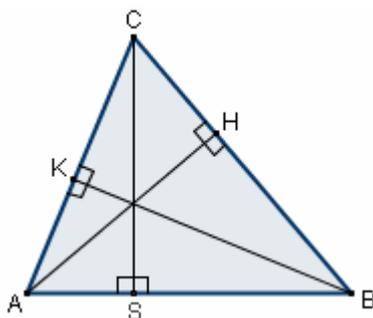
Ecco ora una rassegna di esercizi.

Sono difficili, è vero!!! Non scoraggiarti!

Proprio perché impegnativi, possono essere particolarmente appassionanti.

1) (Esercizio svolto)

In un triangolo la somma delle tre altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro



IPOTESI

$$AH \perp BC, BK \perp AC, CS \perp AB$$

TESI

$$\text{I) } AH + BK + CS < 2p$$

$$\text{II) } AH + BK + CS > p$$

♥ Per motivi di praticità, omettiamo, in questa pagina, il “cappello di segmento”, che sappiamo non “obbligatorio”

In Geometria, generalmente si preferisce indicare il **perimetro** con $2p$; il simbolo p è invece, di norma, impiegato per indicare il **SEMiperimetro** (= la metà del perimetro). Questa scelta si deve al fatto che se si indicasse il *perimetro* con p , il *semiperimetro* dovrebbe essere indicato con $p/2$, e le tante formule geometriche che contengono non il perimetro ma il semiperimetro, si troverebbero così a presentare fastidiosi denominatori.

DIMOSTRAZIONE

- I) $AH < AB$ (triangolo rettangolo AHB: in un tr. rett. ciascun cateto è minore dell'ipotenusa)
 $BK < BC$ (tr. rett. BKC)
 $CS < AC$ (tr. rett. CSA)

$$\overline{AH + BK + CS} < \overline{AB + BC + AC} \quad \text{c.v.d.}$$

- II) $AH > AB - BH$ (tr. ABH: in un triangolo un lato è maggiore della diff. degli altri due)
 $AH > AC - CH$ (tr. ACH)
 $BK > BC - CK$ (tr. BCK)
 $BK > AB - AK$ (tr. ABK)
 $CS > AC - AS$ (tr. ACS)
 $CS > BC - BS$ (tr. BCS)

$$\begin{aligned} 2AH + 2BK + 2CS &> AB - BH + AC - CH + BC - CK + AB - AK + AC - AS + BC - BS = \\ &= AB + AC + BC + AB + AC + BC - (BH + CH + CK + AK + AS + BS) = \\ &= 2AB + 2AC + 2BC - (BC + AC + AB) = \\ &= 2AB + 2AC + 2BC - BC - AC - AB = \\ &= AB + AC + BC \end{aligned}$$

Quindi

$$2(AH + BK + CS) > AB + AC + BC \quad \rightarrow \quad AH + BK + CS > \frac{AB + AC + BC}{2} \quad \text{c.v.d.}$$

ALTRI ESERCIZI

- 2) In ogni triangolo, ciascuna mediana è minore della semisomma (= metà della somma) dei due lati che hanno con essa un estremo in comune
(prolungare la mediana di un segmento uguale alla mediana stessa, poi congiungere ...)
- 3) In ogni triangolo la somma delle tre mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro
(utilizzare il teorema precedente)
- 4) \Rightarrow (*difficile!*) In un triangolo ABC, se O è un punto interno, si ha $\overline{OB} + \overline{OC} < \overline{AB} + \overline{AC}$
- 5) Se in un triangolo ABC si congiungono i vertici con un punto interno O, la somma $OA + OB + OC$ è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro
- 6) In un triangolo ABC sia AD la bisettrice dell'angolo \hat{A} (il punto D sta sul lato BC); dimostrare che $AB > BD$, $AC > CD$
- 7) In un triangolo ABC, se O è un punto interno, si ha $\widehat{BOC} > \widehat{BAC}$
- 8) In ogni quadrilatero, la somma delle diagonali è maggiore del semiperimetro e minore del perimetro