GEOMETRIA: ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

1) Dimostra che in un rombo le altezze relative a due lati consecutivi sono fra loro uguali e che, viceversa, un parallelogrammo nel quale siano uguali fra loro le altezze relative a due lati consecutivi è un rombo.

2) Dimostra che un triangolo con due mediane uguali fra loro, è isoscele.
(*Ricordi la proprietà di cui gode il baricentro*? *Esso divide ciascuna mediana in due parti tali che* …)

3) In un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e di 60°,
l'ipotenusa è uguale al doppio del cateto minore.
(*Indicazione: traccia la mediana relativa all'ipotenusa … Ti ricordi la sua proprietà caratteristica*?)

4) Se in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è uguale al doppio del cateto minore,
allora gli angoli acuti misurano 30° e 60° (*Indicazione: traccia la mediana relativa all'ipotenusa* …)

5) Dimostra che, detto O il punto di intersezione fra le diagonali di un trapezio ABCD
di base maggiore AB, se è $AO = BO$ allora il trapezio è isoscele.

6) Se, in un trapezio isoscele, per l'estremo comune a un lato obliquo e alla base minore
si conduce la parallela all'altro lato obliquo, questa stacca dal trapezio un triangolo isoscele.

7) Nel parallelogrammo ABCD è $BC = 2AB$.
Sia B' il punto simmetrico del punto B rispetto al punto A
(ossia: situato sul prolungamento di AB dalla parte di A, e tale che $AB' = AB$).
Dimostra che la congiungente CB' fa da bisettrice per l'angolo $D\hat{C}B$.

8) ABCD è un parallelogrammo; E, F sono i punti medi dei due lati opposti AD e BC rispettivamente.
Dimostra che: I) $EF \parallel AB$ II) $EC \parallel AF$ III) BD taglia EF in due parti uguali.

9) Se sui due cateti AB e AC di un triangolo ABC, rettangolo in A, si costruiscono,
all'esterno del triangolo, due quadrati, allora due fra le diagonali di questi quadrati
stanno una sul prolungamento dell'altra, e le due rimanenti sono parallele tra loro.

10) Preso un punto P sulla bisettrice di un angolo convesso, traccia per P le parallele ai lati dell'angolo
e dimostra che esse individuano, coi lati stessi, un rombo.

11) Traccia le due diagonali di un parallelogrammo ABCD e prolunga:
la diagonale AC, dalle due parti, di due segmenti fra loro uguali $AE = CF$;
e l'altra diagonale BD, dalle due parti, di due segmenti fra loro uguali $BG = DH$.
Dimostra ora che pure il quadrilatero EGFH è un parallelogrammo.

12) In un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, si tracciano:
la mediana AM, la bisettrice CD, e infine, detto E il punto di intersezione fra AM e CD,
la perpendicolare EH da E fino al lato AC. Dimostra che il quadrilatero MCHE è un deltoide
(ossia, un quadrilatero con due lati consecutivi uguali fra loro e gli altri due pure uguali fra loro).

13) Dimostra che un trapezio in cui l'asse della base maggiore risulti asse anche per la base minore,
è certamente isoscele.

14) In un triangolo rettangolo, l'altezza e la mediana relative all'ipotenusa formano un angolo,
che è uguale alla differenza fra gli angoli acuti del triangolo.

15) In un triangolo ABC, rettangolo in A, sia AD la bisettrice dell'angolo retto,
e siano E, F le proiezioni del punto D sui cateti AB e AC. Dimostra che $EF = AD$.

16) In un triangolo qualsiasi ABC, l'angolo compreso fra la bisettrice e l'altezza che escono dal vertice C
è uguale alla semidifferenza dei due angoli di vertici A e B.

17) In un triangolo ABC, siano AD, BE e CF le tre bisettrici, e si indichi con I l'incentro.
Sia poi H la proiezione di I sul lato AB.
Si chiede di dimostrare che i due angoli $A\hat{I}H$ e $B\hat{I}F$ sono fra loro uguali.

18) E' dato un triangolo ABC, rettangolo in C.
L'altezza CH relativa all'ipotenusa forma coi cateti due angoli acuti $A\hat{C}H$ e $B\hat{C}H$
dei quali si tracciano le bisettrici, fino a tagliare l'ipotenusa rispettivamente in P e in Q.
Ciascuno dei triangoli BCP, ACQ è allora isoscele: dimostralo.

19) Se si prende un punto P sul prolungamento, dalla parte di A, della base AB di un triangolo isoscele
ABC, e si tracciano le distanze PH, PK di P dalle rette su cui giacciono i lati obliqui CA e CB,
allora la differenza $PK - PH$ è uguale all'altezza relativa a uno dei lati obliqui.

20) Sia ABC un triangolo, e siano D, E, F i punti medi di AB, AC, BC rispettivamente.
Sapresti spiegare perché il baricentro di DEF coincide col baricentro di ABC?

21) Se nel triangolo ABC si tracciano le due altezze BH e CK,
l'asse del segmento HK passerà per il punto medio del lato BC: perché?

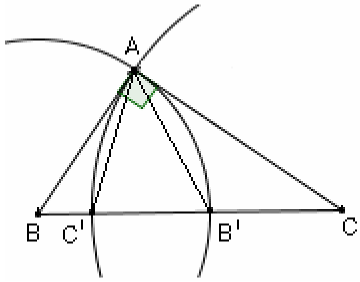
22) Nel triangolo ABC, sia O l'ortocentro, M il punto medio di AB, N il punto medio di AC,
D ed E i punti medi di OB e OC rispettivamente. Il quadrilatero DENM è un rettangolo: dimostralo.

23) Sia PQR un triangolo qualsiasi, M ed N i punti medi dei due lati PQ e PR, H la proiezione di R su PQ.
Si chiede di dimostrare che l'angolo $H\widehat{N}M$ è uguale alla differenza fra i due angoli $\widehat{P}$ e $\widehat{Q}$.

24) In un triangolo rettangolo ABC, si traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa
poi le distanze HK e HS del punto H dai due cateti AB e AC rispettivamente.
Dimostra che i due angoli $H\widehat{K}S$ e $\widehat{B}$ sono uguali.

25) Dimostra che in ogni trapezio isoscele, gli assi dei quattro lati passano per uno stesso punto.

26) Si disegna un triangolo ABC rettangolo in A
poi, col compasso, due archi di circonferenza:
uno di centro B e passante per A, l'altro di centro C e passante per A.
Tali archi di circonferenza vanno a intersecare
l'ipotenusa BC nei due punti B' e C' rispettivamente.
Ora, l'angolo $C'\widehat{A}B'$ avrà ampiezza costante,
qualunque sia la forma del triangolo rettangolo ABC di partenza.
Qual è questa ampiezza? Giustifica la risposta.

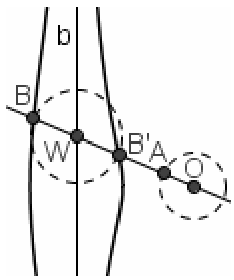


27) (*Insidioso: errori logici in agguato …*)
Considera un parallelogrammo ABCD e prolunga: il lato AB, dalla parte di B, di un segmento $BE = AD$;
poi il lato AD, dalla parte di D, di un segmento $DF = AB$. Dimostra che i tre punti E, C, F sono allineati.

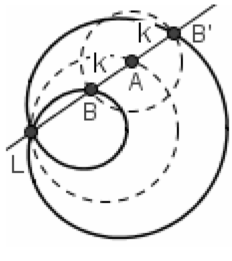
28) Disegna un angolo convesso di vertice A. Siano b, c i lati di questo angolo (dovrai "rinominarli"!)
Prendi un punto su b, chiamalo B e traccia la circonferenza di centro A e raggio AB;
questa andrà a intersecare c in un punto che chiamerai C.
Traccia per il punto B la perpendicolare al lato b; allo stesso modo traccia per C la perpendicolare al lato c;
sia D il punto di intersezione di tali due perpendicolari.
Quale sarà il luogo delle posizioni di D, al variare di B su b? Perché?
Dopo aver risposto, traccia il luogo con **GeoGebra**.

29) Traccia una retta per due punti A e B, poi la circonferenza di centro A e passante per B.
Definisci ora sulla retta AB un punto mobile; cambia il suo nome in P;
modifica il suo colore; traccia la circonferenza di centro B e raggio BP,
e chiama Q una delle sue intersezioni con la circonferenza iniziale. La retta AQ taglierà l'ultima
circonferenza tracciata in un secondo punto (oltre a Q) che denominerai W e colorerai come desideri.
Ora cerca di prevedere (non è facile!) che forma avrà il luogo delle posizioni di W
al variare di P, e traccialo infine con **GeoGebra** per confermare le tue congetture.

30) Sul foglio **GeoGebra**, crea un punto O ("polo") e una retta b non passante per O.
Con centro in O traccia una circonferenza, e prendi su di essa un punto A.
Traccia la retta OA, indica con W il punto in cui questa retta interseca la retta b,
poi con centro in W traccia una circonferenza di raggio fissato
(strumento "Circonferenza dati centro e raggio").
Siano infine B, B' i due punti di intersezione di tale circonferenza con la retta OA.
Il luogo descritto dalla coppia di punti B, B' al variare di A è chiamato "**concoide di Nicomede**"; è curioso osservare come cambia di forma se la retta b viene spostata.



31) Sul foglio **GeoGebra**, sia L un punto fissato di una circonferenza fissata. Sia poi A
un punto che può invece variare, su quella circonferenza. Tracciata la retta LA, i due
punti B e B', che stanno su quella retta da parti opposte rispetto ad A, e sono tali
che $AB = AB' = costante = k$, determinano, al variare di A, la **lumaca di Pascal**.



32) Traccia una retta per due punti A e B piuttosto vicini, poi la circonferenza
di centro A e passante per B. Definisci ora su tale circonferenza un punto;
rinominalo, chiamandolo N; scegli per questo punto un bel colore giallo sole;
disegna la circonferenza di centro B e raggio BN, poi quella di centro N e raggio NB.
Sia G l'intersezione, esterna alla circonferenza iniziale,
dell'ultima fra le circonferenze in gioco, con la retta AN; rendi rosso l'aspetto di G.
Crea con **GeoGebra** il luogo descritto da G al variare di N.
Questa curva $N \to G$, da colorare anch'essa in rosso, è una dedica personale dell'autore del libro.