10. CORRISPONDENZE FRA LOGICA E INSIEMI

Supponiamo ora che $a(x)$, $b(x)$ siano due proposizioni aperte, definite sullo stesso insieme ambiente.

- Detto A l'insieme di verità della $a(x)$, e detto B l'insieme di verità della $b(x)$,
  è facile convincersi che l'insieme di verità della proposizione aperta composta $a(x) \wedge b(x)$ è $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

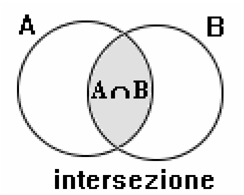
  Ad esempio, considerate le proposizioni
  $$a(x) = "x\ \grave{e}\ un\ numero\ pari"; \quad b(x) = "x\ \grave{e}\ un\ multiplo\ di\ 3"$$
  - ❑ i rispettivi insiemi di verità sono:
    $\mathrm{A} = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ ...\}; \quad \mathrm{B} = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ ...\}$
  - ❑ la proposizione $a(x) \wedge b(x)$ è la seguente:
    “x è un numero pari e contemporaneamente è un multiplo di 3”
  - ❑ e l’insieme di verità della $a(x) \wedge b(x)$ è perciò l’insieme dei multipli di 6, ossia
    $\{6,\ 12,\ 18,\ ...\}$.

  Ma quest’ultimo insieme è appunto $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$!!!

- E' altrettanto immediato determinare gli insiemi di verità di $a(x) \vee b(x)$; $\overline{a}(x)$:
  essi sono rispettivamente $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$; $\overline{\mathrm{A}}$ (= il complementare di A rispetto all'insieme universo)

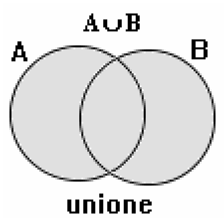
RIASSUNTO SCHEMATICO

A = insieme di verità della proposizione aperta $a(x)$
B = insieme di verità della proposizione aperta $b(x)$



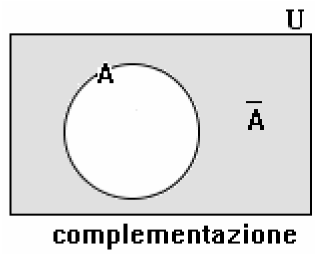
L’insieme di verità della proposizione aperta $a(x) \wedge b(x)$ è $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

Infatti, dire $a(x) \wedge b(x)$
è come dire $x \in \mathrm{A} \wedge x \in \mathrm{B}$
cioè
$x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$



L’insieme di verità della proposizione aperta $a(x) \vee b(x)$ è $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

Infatti, dire $a(x) \vee b(x)$
è come dire $x \in \mathrm{A} \vee x \in \mathrm{B}$
cioè
$x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$



L’insieme di verità della proposizione aperta $\overline{a}(x)$ è $\overline{\mathrm{A}}$ (= il complementare di A rispetto all’insieme universo)

Infatti, dire $\overline{a}(x)$
è come dire $x \notin \mathrm{A}$
cioè
$x \in \mathrm{U} - \mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$

♥ **Notare come i SIMBOLI scelti dai matematici per indicare,
da una parte, i connettivi proposizionali, dall’altra le operazioni fra insiemi, sono tali che
CIASCUN SIMBOLO LOGICO RICHIAMA IL SUO CORRISPONDENTE INSIEMISTICO:**

LOGICA			INSIEMI
congiunzione	$\wedge$	$\cap$	**intersezione**
disgiunzione	$\vee$	$\cup$	**unione**
negazione	$\overline{}$	$\overline{}$	**complementazione**

ESERCIZI (proposizioni aperte, logica e insiemi); le risposte sono a pag. 376.

1) Sia $a(x) = $"*x è multiplo di* 4", $b(x) = $"*x è multiplo di* 6".
Allora l'insieme di verità
di $a(x)$ è {..}
e quello di $b(x)$ è {..}.
Sarà poi $a(x) \wedge b(x) = $".."
mentre l'insieme degli x per cui è vera $a(x) \vee b(x)$ ha come elementi ....

2) Sia $p(x) = $"*x è multiplo di* 4", $q(x) = $"*x è multiplo di* 8".
Allora è
$p(x) \wedge q(x) = $ ……………………
$p(x) \vee q(x) = $ …………………..
Quali sono gli x che rendono vera la proposizione $p(x) \wedge \overline{q(x)}$? ……………………………..

Si chiamano "**INTERVALLI**" particolari insiemi numerici (vedi schema seguente).
Gli intervalli possono essere: chiusi, aperti, semiaperti; possono essere limitati o illimitati.
Nota **l'uso delle parentesi**: parentesi **QUADRA** = **estremo COMPRESO**; **TONDA** = **estremo ESCLUSO**

Intervallo chiuso di estremi a e b: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \le x \le b\}$

Intervallo aperto di estremi a e b: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$

Interv. di estr. a e b, chiuso a sinistra e aperto a destra: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \le x < b\}$

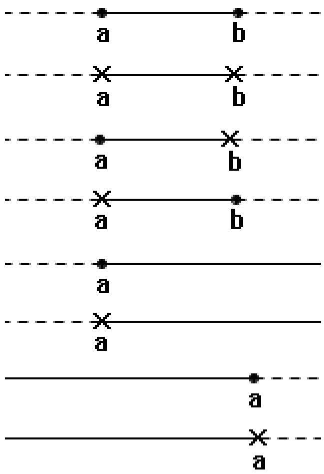
Interv. di estr. a e b, aperto a sinistra e chiuso a destra: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \le b\}$

Intervallo chiuso illimitato superiormente: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \ge a\}$

Intervallo aperto illimitato superiormente: $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

Intervallo chiuso illimitato inferiormente: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \le a\}$

Intervallo aperto illimitato inferiormente: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$



Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$:
- contiene il 4;
- contiene tutti i numeri, **NON SOLO** quelli interi **MA ANCHE** quelli "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- NON contiene l'8.

Anche l'intero insieme $\mathbb{R}$ si può pensare come un intervallo (illimitato da entrambe le parti): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3) a) $(2,5) \cap (3,7) = ?$ b) $(2,5) \cup (3,7) = ?$ c) $(2,5] \cap (3,7) = ?$ d) $(2,5) \cup [3,7) = ?$ e) $[2,5) \cup (3,7] = ?$
f) $\left(-3, \frac{1}{4}\right) \cap [0, +\infty) = ?$ g) $\left(-3, \frac{1}{4}\right) \cup [0, +\infty) = ?$ h) $(-5,-1) \cap (2,7) = ?$ i) $(-5,-1) \cup (2,7) = ?$

4) Sia $a(x) = $"$0 < x < 5$". Qual è l'insieme ambiente di $a(x)$? …….. E il suo insieme di verità? ………..

5) Sia $a(x) = $"$2 < x < 10$", $b(x) = $"$5 < x < 15$".
a) Qual è l'insieme di verità di $a(x) \wedge b(x)$? …………..
b) E quello di $a(x) \vee b(x)$? …………..
c) E quello di $a(x) \wedge \overline{b(x)}$? …………..
d) E quello di $\overline{a(x)} \wedge b(x)$? …………..

6) Sia $a(n) = $"*n è divisore di* 12", $b(n) = $"*n è divisore di* 24".
Si può osservare che ogni valore di n che rende vera $a(n)$, renderà vera pure $b(n)$.
Questo fatto, cosa comporta per i rispettivi insiemi di verità A, B?

7) Considerate le proposizioni aperte, nell'insieme ambiente dei quadrilateri:
$p(x) = $"*x è un parallelogrammo*", $d(x) = $"*x è un quadrilatero con le diagonali uguali*",
$c(x) = $"*x è un quadrilatero con almeno due lati opposti paralleli*",
stabilisci quali fra le proposizioni date sono vere nel caso x sia
a) un trapezio scaleno
b) un rettangolo.
c) Può esserci un valore di x che renda vera $d(x)$ ma false $p(x)$, $c(x)$?