11. DALL'IMPLICAZIONE E BIIMPLICAZIONE "MATERIALE" ALL'IMPLICAZIONE E BIIMPLICAZIONE "LOGICA"

E' frequentissimo in matematica utilizzare la struttura linguistica **SE … ALLORA …**
(o espressioni linguistiche equivalenti) per mettere in relazione
DUE PROPOSIZIONI APERTE NELLA STESSA VARIABILE.

Si parla allora di **IMPLICAZIONE LOGICA**.

Il simbolo specifico utilizzato per indicare l'implicazione logica è $\Rightarrow$

Esempio: *x è multiplo di 6* $\Rightarrow$ *x è multiplo di 3*

Leggi: "SE *x* è multiplo di 6, ALLORA *x* è multiplo di 3"
"il fatto che *x* sia multiplo di 6 IMPLICA che *x* è multiplo di 3"

Va detto che
la distinzione fra l'implicazione logica e l'implicazione materiale è spesso un po' "sfumata" (vedi NOTA 2).

Si dice "**implicazione logica**" una proposizione ottenuta stabilendo, fra due proposizioni aperte con la stessa variabile, un particolare legame che potrà essere indicato col simbolo

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

e descritto con l'espressione linguistica: "**SE … ALLORA …**", oppure "**… IMPLICA …**", o analoghe.

♥ Un' **IMPLICAZIONE LOGICA** è considerata (vedi poi NOTA 3):

- **VERA** quando accade che
  ogni valore della variabile che rende vera la proposizione che "scaglia la freccia" ("antecedente"), rende vera anche la proposizione che "riceve la freccia nella schiena" ("conseguente");
- **FALSA** quando avviene il contrario, ossia quando
  esiste almeno un valore della variabile per cui l'antecedente è vera, ma la conseguente è falsa.

♥ Di conseguenza, per **dimostrare la FALSITA'** di un'implicazione logica fra due proposizioni aperte, basterà trovare **anche un solo CONTROESEMPIO** (= caso in cui l'antecedente è vera, ma la conseguente è falsa).

NOTA 1 (SULLA SIMBOLOGIA; leggi anche, a complemento del discorso, le note successive)

Nella pratica dell'attività matematica, non è il caso di farsi eccessivi problemi quando si tratta di scegliere fra la notazione $\rightarrow$ e la notazione $\Rightarrow$ per indicare "implicazione" in un dato contesto.
$\Rightarrow$, in fondo, equivale a $\rightarrow$ abbinato con $\forall$ ("per ogni"): $p(x) \Rightarrow q(x)$ equivale a $\forall x,\ p(x) \rightarrow q(x)$.

♥ **I due simboli $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ vanno bene entrambi allo scopo di schematizzare un "SE … ALLORA …" ; diciamo che $\Rightarrow$ suggerisce maggiormente l'idea di un "SE … ALLORA …" di carattere *generale*, riferito a una situazione in cui sono presenti una o più variabili e valido per qualunque valore delle variabili coinvolte.**

Discorso analogo per la *doppia* implicazione "SE … ALLORA … E VICEVERSA" : $\leftrightarrow$ oppure $\Leftrightarrow$.

E' del tutto ovvio che una "freccia" ($\rightarrow$) si può anche impiegare con l'intenzione di indicare un "verso di percorrenza", oppure come simbolo di "rimando", di "collegamento", di "corrispondenza".
Qui l'implicazione evidentemente non c'entrerebbe. L'interpretazione corretta si trae con facilità dal contesto.

NOTA 2 (SUL CONFINE A VOLTE LABILE TRA IMPLICAZIONE MATERIALE E LOGICA)

L'implicazione "materiale" e l'implicazione "logica" differiscono nel fatto che

- la prima lega due proposizioni CHIUSE,
- mentre la seconda lega due proposizioni APERTE (nella stessa variabile).

Si può osservare tuttavia che **parecchie implicazioni che si incontrano in matematica appaiono a prima vista come implicazioni materiali, ma in realtà sono implicazioni logiche "mascherate".**
Ad esempio, quando io dico

"Se il mio anno di nascita è divisibile per 6, allora è divisibile anche per 3"

in realtà sto soltanto utilizzando, riferito al caso particolare del mio anno di nascita, il **ragionamento generale** che corrisponde all'implicazione logica

"Se un numero x è divisibile per 6, allora x è divisibile anche per 3"

NOTA 3 (SULLA VERITA' O FALSITA' DI UNA IMPLICAZIONE LOGICA)

Osserviamo che un'implicazione logica $p(x) \Rightarrow q(x)$ è dunque:

- vera quando, per tutti i valori di *x*, è sempre vera la corrispondente implicazione materiale $p \rightarrow q$
- falsa quando esiste almeno un valore di *x* per cui la corrispondente implicazione materiale $p \rightarrow q$ è falsa.

Analogo è il discorso per la **biimplicazione logica**. Eccone un esempio:

ABC è equilatero $\Leftrightarrow$ *ABC è equiangolo*

"SE ABC è equilatero, ALLORA ABC è equiangolo E VICEVERSA"
"ABC è equilatero SE E SOLO SE è equiangolo"
"Il fatto che ABC sia equilatero IMPLICA che ABC sia equiangolo, E VICEVERSA"
"Il fatto che ABC sia equilatero BIIMPLICA che ABC sia equiangolo"

♥ Una **biimplicazione logica** (= biimplicazione fra due proposizioni aperte con la stessa variabile)

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

è considerata

- **VERA** quando accade che
  ogni valore della variabile che rende vera la proposizione di sinistra,
  rende vera anche la proposizione di destra,
  E VICEVERSA
  (in pratica, quando sono vere nel senso prima specificato,
  sia l'implicazione da sinistra verso destra $\Rightarrow$
  che l'implicazione da destra verso sinistra $\Leftarrow$);
- **FALSA** quando avviene il contrario, ossia quando
  esiste almeno un valore della variabile
  per cui una delle due proposizioni risulta vera e l'altra falsa.

ESERCIZI (risposte a pag. 376)

Fra le seguenti implicazioni e biimplicazioni logiche, stabilisci quali sono vere e quali false:

a) n è dispari $\Rightarrow$ n è primo

b) n è primo $\Rightarrow$ n è dispari

c) Se un quadrilatero ha i quattro lati uguali, allora ha anche le diagonali uguali

d) Se un quadrilatero ha le diagonali uguali, allora ha anche i quattro lati uguali

e) $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

f) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

g) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$

h) x divisibile per 6 $\Rightarrow$ x è divisibile per 3

i) x divisibile per 3 $\Rightarrow$ x è divisibile per 6

j) x divisibile per 6 $\Leftrightarrow$ x è divisibile per 3

k) Se un triangolo ha due lati uguali, allora ha anche due angoli uguali

l) Se un triangolo ha due angoli uguali, allora ha anche due lati uguali

m) ABC ha due angoli uguali $\Leftrightarrow$ ABC ha due lati uguali

n) $x < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0$

o) $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$