## 14. QUANTIFICATORI

$\forall$ (*"per ogni", "per qualsiasi", "qualunque sia"*): *"quantificatore UNIVERSALE"*
$\exists$ (*"esiste"*) *la cui negazione è* $\nexists$ (*"non esiste"*): *"quantificatore ESISTENZIALE"*

Per imparare a trafficare coi quantificatori, ecco un buon **ESERCIZIO**.
**Leggi** ad alta voce le seguenti proposizioni; poi **stabilisci**, per ciascuna di esse, **se è vera o falsa.**

**Risposte a pag. 377; clicca sulla freccia per chiarimenti** ⇨

1) $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad / \quad x+y=0$
2) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad / \quad \forall y \in \mathbb{Z}, \quad x+y=0$
3) $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad / \quad x \cdot y=0$
4) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad / \quad \forall y \in \mathbb{Z}, \quad x \cdot y=0$
5) $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad / \quad x \cdot y=1$
6) $\forall x \in \mathbb{Q}-\{0\}, \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad / \quad x \cdot y=1$
7) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad / \quad 2x-1=0$
8) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \,/\, x \in A \wedge x \notin B$

*Tieni presente che:*

$\mathbb{Q}$ *indica l'insieme dei numeri razionali (relativi)*

$\mathbb{Z}$ *indica l'insieme degli interi relativi.*
*Dunque* $\mathbb{Z}$ *è un sottoinsieme di* $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}_a$ *indica l'insieme dei numeri razionali assoluti*
$\mathbb{R}$ *è l' insieme dei numeri reali (relativi)*
$\mathbb{R}_a$ *è l' insieme dei numeri reali assoluti*

La "classica" **definizione schematica di sottoinsieme**:

$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)}$ ("A è sottoinsieme di B se e solo se quando *x* appartiene ad A, allora *x* appartiene anche a B")

può essere **riscritta in modo equivalente utilizzando i quantificatori**:

$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \quad x \in B)}$ ("A è sottoinsieme di B se e solo se per ogni *x* appartenente ad A, *x* appartiene anche a B")

E' importante saper scrivere correttamente la **negazione di una proposizione contenente quantificatori**.
Facciamo qualche esempio (ricorda che "/", ":" si leggono "*tale* (*o tali*) *che*"):

| | *Proposizione* | *Negazione* |
|---|---|---|
| 9) | $\forall x \in I, \; x \in J$ | $\exists x \in I \,/\; x \notin J$ |
| 10) | $\forall x \in \mathbb{R}, \; \exists y \in \mathbb{R} \,/\; xy=1$ | $\exists x \in \mathbb{R} \,/\; \forall y \in \mathbb{R}, \; xy \neq 1$ |
| 11) | $\exists a \in \mathbb{R}: \; \forall b,c \in \mathbb{R}, \; a \cdot b \cdot c=0$ | $\forall a \in \mathbb{R}, \; \exists b,c \in \mathbb{R}: \; a \cdot b \cdot c \neq 0$ |

♥ C'è una **regola generale per negare una proposizione contenente quantificatori**: essa dice di
♪ **mutare ogni quantificatore universale in esistenziale, e viceversa**
♫ **e sostituire la proposizione cui si riferiscono i quantificatori con la sua negazione**.

**ESERCIZI**: fra le seguenti proposizioni contenenti quantificatori, riconosci quali sono quelle false, e in tal caso scrivine la negazione.

| | *Proposizione* | *V o F ?* | *Negazione (in caso di falsità dalla proposizione iniziale)* |
|---|---|---|---|
| 12) | $\forall x \in \mathbb{R}_a, \; x^2 \geq x$ | | |
| 13) | $\exists a \in \mathbb{N} \,/\; a^2=20$ | | |
| 14) | $\forall n \in \mathbb{N}, \; n^2+n$ *è pari* | | |
| 15) | $\exists x \in \mathbb{R} \,/\; x=1/x$ | | |
| 16) | $\exists x \in \mathbb{R} \,/\; x=-1/x$ | | |
| 17) | $\forall x,y \in \mathbb{R} \;\; x^2=y^2 \Rightarrow x=y$ | | |

**Risposte a pag. 377; clicca sulla freccia per chiarimenti** ⇨

**ESERCIZI** (negazione di proposizioni con quantificatori). **Risposte a pag. 377.**

1) Se non è vero che esista uno studente che ha fatto giuste tutte le domande di un certo test, allora:
A) c'è uno studente che non ne ha azzeccata neppure una
B) esiste almeno uno studente che ne ha sbagliata una o più
C) ognuno degli studenti le ha sbagliate tutte
D) ciascuno studente ne ha sbagliata almeno una
E) tutti gli studenti ne han fatta giusta almeno qualcuna

2) Aldo dice: "Dài, ci sarà chi saprà risolvere almeno uno dei miei problemi! ...".
Bruno ribatte: "Non è mica vero!".
Cosa afferma Bruno?
A) Che qualcuno non sa risolvere tutti i problemi di Aldo
B) Che tutti sanno risolverli tutti
C) Che nessuno è in grado di risolvere nemmeno uno dei problemi in questione
D) Che nessuno è in grado di risolvere tutti i problemi
E) Che qualcuno sa risolverli tutti

*I seguenti sono tratti da test di ingresso universitari:* 3, 5, 7, 8 *Architettura*; 4*, Veterinaria*; 6*, Medicina*

3) Pierino (lo sbruffone) afferma: "Ogni volta che gioco a tombola, vinco io!"
Il suo amico Carletto ribatte che questo non è vero. Carletto ha ragione; dunque necessariamente
A) una volta ha giocato a tombola con Pierino e ha vinto Pierino
B) ogni volta che ha giocato a tombola, Pierino ha perso
C) qualche volta Carletto ha giocato a tombola con Pierino e altri amici, e non ha vinto Carletto
D) ogni volta che non ha giocato a tombola con Pierino, ha vinto Carletto
E) almeno una volta Pierino ha giocato a tombola e non ha vinto

4) Negare che "ogni uomo ha un cane" equivale a dire che:
A) nessun uomo ha un cane B) tutti gli uomini non hanno cani C) esistono uomini senza cane
D) tutti i cani sono di ogni uomo E) ogni uomo non ha un cane

5) *Credevo che tutti i medici avessero un rimedio per ogni male, ma l'esperienza mi ha costretto a ricredermi.*
Quale delle seguenti affermazioni consegue necessariamente dalla premessa?
A) Per ogni male, c'è un medico che non sa porvi rimedio
B) C'è un male per cui nessun medico ha un rimedio
C) I medici non hanno rimedio per nessun male
D) Esiste un medico che non ha un rimedio per un certo male
E) Ogni medico manca del rimedio per almeno un male

6) Se è vero che «non tutti i mali vengono per nuocere»,
sarà necessariamente vera anche UNA delle affermazioni seguenti:
A) i mali non nuocciono B) quelli che nuocciono non sono mali
C) se non vengono per nuocere non sono mali D) qualche male non viene per nuocere
E) se sono mali non vengono per nuocere

7) Un grande teorico dei numeri ha scoperto i numeri *troppobelli*, e, avendo osservato che tutti quelli che ha scoperto sono pari, congettura che esistano solo numeri *troppobelli* pari.
Un suo allievo, studiando con cura questi numeri, afferma che la congettura del maestro è falsa.
Dunque l'allievo sostiene che:
A) nessun numero pari è *troppobello* B) c'è almeno un numero pari che non è *troppobello*
C) esiste solo un numero finito di *troppobelli* pari D) tutti i numeri *troppobelli* sono dispari
E) c'è almeno un numero *troppobello* dispari

8) Nel libero Stato di Burgundia tutti gli abitanti sono biondi oppure bruni. Inoltre
NON E' VERO che in ogni città di Burgundia c'è almeno una casa in cui tutti gli abitanti sono biondi.
Allora necessariamente in Burgundia:
A) c'è almeno una città dove c'è almeno un bruno in ogni casa
B) in ogni città c'è almeno una casa in cui tutti gli abitanti sono bruni
C) in ogni città c'è almeno un bruno in ogni casa
D) c'è almeno una città dove ci sono dei biondi in ogni casa
E) c'è almeno una città dove c'è almeno una casa in cui almeno un abitante è bruno