EQUAZIONI FRATTE E LETTERALI

1. EQUAZIONI FRATTE

Sono quelle equazioni nelle quali l'incognita compare, almeno una volta, a denominatore.

Risolvendo un'equazione fratta, si perviene sempre a un passaggio del tipo:

(1) $\dfrac{N_1(x)}{D(x)} = \dfrac{N_2(x)}{D(x)}$ (*la x fra parentesi evidenzia che si tratta di espressioni contenenti l'incognita x*)

Eliminando a questo punto i due denominatori uguali, si ottiene l'equazione

(2) $N_1(x) = N_2(x)$

LE DUE EQUAZIONI (1) e (2) NON SONO PERO' NECESSARIAMENTE EQUIVALENTI
(= non hanno necessariamente le stesse soluzioni, può darsi che non abbiano le stesse soluzioni).
Infatti:

a) $\Downarrow$ se un certo valore di x è soluz. della (1), allora lo stesso valore di x è certamente soluz. anche della (2);

b) $\not\Uparrow$ però **non vale il viceversa**. Infatti, se un certo valore di x è soluzione della (2), vuol dire che quel valore di x rende uguali le due espressioni che stanno a NUMERATORE nella (1); ma può eccezionalmente accadere che il valore in questione vada pure ad annullare l'espressione D(x), ossia il DENOMINATORE della (1), e in questo caso NON renderebbe i due membri della (1) uguali, bensì li renderebbe entrambi privi di significato, quindi NON SAREBBE soluzione della (1).

Ricapitolando,

> ♥ **nel caso delle equazioni fratte, la soluzione che si trova alla fine è accettabile**
> **(cioè, è soluzione anche dell'equazione di partenza)**
> **soltanto se NON annulla il denominatore eliminato D(x).**

❑ **Esempio**:

$$\frac{2}{4x^3-x} = \frac{5}{6x^2+3x} + \frac{1}{2x^2-x}$$

$$\frac{2}{x(2x+1)(2x-1)} = \frac{5}{3x(2x+1)} + \frac{1}{x(2x-1)}$$

$$\frac{6}{\cancel{3x(2x+1)(2x-1)}} = \frac{5(2x-1)+3(2x+1)}{\cancel{3x(2x+1)(2x-1)}} \rightarrow$$

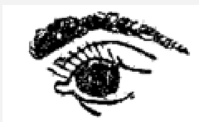
$$6 = 10x - 5 + 6x + 3$$

$$6 = 16x - 2;\quad -16x = -8$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\ \text{NON ACCETTABILE}}$$

L'equazione è perciò IMPOSSIBILE.

OCCHIO!



$3x \ne 0;\ 2x+1 \ne 0;\ 2x-1 \ne 0$
ossia

$$\boxed{x \ne 0;\ x \ne -\frac{1}{2};\ x \ne \frac{1}{2}}$$

$\downarrow$

" CONDIZIONI DI ACCETTABILITA' "

(leggi l'osservazione qui a destra)

♥ Queste annotazioni, che si scrivono nel momento in cui si mandano via i due denominatori uguali, significano:

se alla fine dovessimo trovare come soluzione $x = 0$, oppure $x = -1/2$, oppure $x = 1/2$, si tratterebbe di una "falsa soluzione", o, come si suol dire, di una "soluzione non accettabile", quindi da scartare.

❑ **Un altro esempio**: $\dfrac{1}{x(x+7)} = \dfrac{1}{2x(3x-4)}$

$$\frac{2(3x-4)}{\cancel{2x(x+7)(3x-4)}} = \frac{x+7}{\cancel{2x(x+7)(3x-4)}}$$

$2x \ne 0$, $\boxed{x \ne 0}$; $x+7 \ne 0$, $\boxed{x \ne -7}$; $3x-4 \ne 0$, $3x \ne 4$, $\boxed{x \ne 4/3}$

$$6x - 8 = x + 7;\quad 5x = 15;\quad \boxed{x = 3\quad \textit{accettabile}}$$

Come avrai notato, di fronte alle **condizioni contenenti il simbolo $\ne$ ("diverso da")** ci si comporta esattamente come di fronte alle equazioni: si isola la lettera con gli stessi passaggi, semplicemente scrivendo "$\ne$" anziché "=".

Qualche altro caso:

$\dfrac{\dots}{\cancel{5x+4}}$ $\quad 5x+4 \ne 0$, $\quad 5x \ne -4$, $\quad \boxed{x \ne -\dfrac{4}{5}}$

$\dfrac{\dots}{\cancel{(x+3)^2}}$ $\quad (x+3)^2 \ne 0,\ x+3 \ne 0,\ \boxed{x \ne -3}$

Un quadrato è uguale a 0 quando è uguale a 0 la sua base, è diverso da 0 quando è diversa da 0 la sua base

Schematicamente: $\frac{N_1(x)}{D(x)} = \frac{N_2(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} N_1(x) = N_2(x) \\ D(x) \neq 0 \end{cases}$ OSSIA **l'equazione è equivalente al sistema**. Ricordiamo che la graffa di sistema esprime il connettivo logico $\wedge$ ("ET")

$\boxed{\Rightarrow}$ *Se, per un certo x, è* $\frac{N_1(x)}{D(x)} = \frac{N_2(x)}{D(x)}$, *allora, per lo stesso x, sarà anche* $\begin{cases} N_1(x) = N_2(x) \\ D(x) \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$ *Se, per un certo x, è* $\begin{cases} N_1(x) = N_2(x) \\ D(x) \neq 0 \end{cases}$, *allora, per lo stesso x, sarà anche* $\frac{N_1(x)}{D(x)} = \frac{N_2(x)}{D(x)}$

♥ **Le "condizioni" vanno poste ogniqualvolta un denominatore cessa di essere tale**, per effetto:

a) dell'**eliminazione dei due denominatori uguali**

b) … ma anche di un "**capovolgimento**"! Esempio:

$\frac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-3}{x-4}} = 1 \quad \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x-4}{x-3} = 1 \quad \boxed{x \neq 4}$ (perché $x-4$, che era a denominatore, per effetto del capovolgimento ha cessato di esserlo)

c) … ma anche di una **semplificazione**! Esempio:

$\frac{\cancel{x-5}}{x-3} \cdot \frac{2x+1}{\cancel{x-5}} = 7 \quad \boxed{x \neq 5}$ (perché $x-5$, che era a denominatore, per effetto della semplificazione ha cessato di esserlo)

d) … ma anche del **procedimento "veloce"** col quale si può eliminare il denominatore pure senza fare i due denominatori comuni uguali, ma invece **moltiplicando ambo i membri dell'equazione per il denominatore stesso**! Prendiamo ad es. l'equazione $\frac{3x-2}{x} + 7 = 0$;

per mandar via il denominatore, in questa situazione molto semplice, anziché fare i due denominatori comuni uguali posso più rapidamente moltiplicare ambo i membri per x ottenendo:

$x \cdot \left(\frac{3x-2}{x} + 7\right) = 0 \cdot x \quad 3x - 2 + 7x = 0 \quad \boxed{x \neq 0}$ (perché comunque, prima della moltiplicazione, un denominatore x c'era)

ESERCIZI 1) $\frac{x+1}{x} = \frac{x+4}{x+2}$ 2) $3 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9x-1}{x}$ 3) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{11x+3}{x^2-9}$ 4) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{2x+4}$ ⇨

5) $\frac{3}{x^2+4+4x} = \frac{2}{x^2-4}$ ⇨ 6) $\frac{3x-1}{2x^2-2x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} = 0$ 7) $\frac{x-2}{x} = \frac{x}{x+1}$ 8) $\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2x-2}$

9) $\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x} = 0$ 10) $\frac{2}{x^2-1} = \frac{3}{x^2-x-2}$ 11) $\frac{2}{3} - \frac{4x+5}{x-2} = 1$ 12) $\frac{4}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x^2-5x+6}$

13) $2 \cdot \frac{x}{2x-1} = \frac{3x+1}{3x-1}$ ⇨ 14) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-4} = \frac{x}{x^2-6x+8}$ 15) $\frac{1}{x^2-2x-3} - \frac{1}{x^2-6x+9} = \frac{x-9}{(x+1)(x-3)^2}$

16) $\frac{2}{3x-2} + \frac{x+2}{3x^2-8x+4} = 0$ ⇨ 17) $\left(\frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x+3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4x+3} = \frac{1}{2x}$ 18) $\frac{5x-2}{x^4-5x^2+4} = \frac{3}{x^3+2x^2-x-2}$

19) $\frac{3}{4x^4-5x^2+1} + \frac{1}{x^2-4x^4} = \frac{1}{2x^4+3x^3+x^2}$ ⇨ 20) $\frac{\frac{x+1}{x-7} - \frac{x-7}{x-1}}{7x-25} + (x-1)\left[x^{-2} - (x-1)^{-2}\right] = 0$

21) $\left(\frac{1}{3x+8} - \frac{1}{2x+8}\right) \cdot \left(\frac{4}{x} + 1\right) = \frac{1}{2}$ 22) $\frac{3}{x-1} - \frac{5}{x^2-2x} = \frac{3x^2-11x+5}{x^3-3x^2+2x}$ 23) $\frac{x}{x+3} = \frac{x+5}{x+7}$

24) $\frac{\frac{2x+3}{x(16x^2-1)} - \frac{1}{4x^2+x}}{x^2} \cdot \frac{(x-1)(1+x)-x^2}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2} = \frac{4}{4x^4-x^3}$ 25) $\frac{\frac{2}{3x+1} - \frac{1}{3x-2}}{3x-1} - \frac{1-\frac{2}{3x}}{\frac{9}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x}} = 0$

SOLUZIONI

1) $x=2$ 2) $x=1/10$ 3) IMP. ($x=3$ *non acc.*) 4) $x=0$ 5) $x=10$ 6) IMP. ($x=1$ *non acc.*)
7) $x=-2$ 8) $x=1/3$ 9) $x=-4$ 10) IMP. ($x=-1$ *non acc.*) 11) $x=-1$ 12) $x=9$ 13) $x=1$
14) IMP. ($x=4$ *non acc.*) 15) $x=5$ 16) IMP. ($x=2/3$ *non acc.*) 17) $x=-2$ 18) IMP. ($x=-2$ *non acc.*)
19) IMP. ($x=0$ *non acc.*) 20) $x=7/15$ 21) Si trova una soluzione accettabile. Fai la verifica, sostituendo.
22) E' INDET.: ammette come soluzione QUALUNQUE numero reale, TRANNE 0, 1, 2. $S = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$
23) $x=-15$ 24) $x=20$ 25) IMP. ($x=-1/3$ *non acc.*)