3. “DISCUSSIONE” DELLE EQUAZIONI LETTERALI

Si dice “DISCUSSIONE” di un’equazione letterale, la RICERCA di quei PARTICOLARI VALORI DEL PARAMETRO (o dei parametri) PER CUI L’EQUAZIONE RISULTA
- **IMPOSSIBILE (= priva di soluzioni)**
- **oppure INDETERMINATA (= dotata di infinite soluzioni).**

Il riconoscimento di tali valori “notevoli” avviene all’atto del passaggio finale,
ossia quando, per isolare x, occorre dividere ambo i membri per il coefficiente di x; ed eventualmente nel caso (raro) in cui l’equazione sia semplificabile per un’espressione contenente il parametro.

Di fronte ad un’equazione letterale, dobbiamo innanzitutto tenere conto di un’idea fondamentale:

♪ **quando noi pensiamo che il parametro indica UN NUMERO FISSATO,**
da *questo* punto di vista abbiamo *UNA* EQUAZIONE

♫ **quando pensiamo che il valore del parametro può essere FISSATO AD ARBITRIO,**
da *quest’altro* punto di vista abbiamo *UNA FAMIGLIA DI INFINITE* EQUAZIONI:
ad *ogni* valore che il parametro può assumere corrisponde *una* delle equazioni della “famiglia”.

♥ **Ora, la “discussione” consiste nell’andare a cercare gli eventuali “elementi degeneri” di questa famiglia, ossia quelle particolari equazioni della famiglia (se ce ne sono) che risultano, eccezionalmente, impossibili o indeterminate.**

Vediamo una piccola rassegna di ESEMPI.

1) $ax-2=5x$

Trasportiamo i termini contenenti *x* a 1° membro e i termini noti a 2° membro:

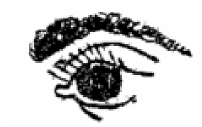
$$ax-5x=2$$

Raccogliamo *x*:

$$\underbrace{(a-5)}_{\textit{coefficiente di } x}\quad x=2$$

Ora l’obiettivo è di isolare *x*;
x è moltiplicata per il suo coefficiente $(a-5)$,
per cui occorrerà dividere entrambi i membri per tale coefficiente.

♥ MA UNA DIVISIONE E’ EFFETTUABILE SOLTANTO SE
IL NUMERO PER CUI SI INTENDE DIVIDERE E’ DIVERSO DA ZERO !



Quindi dobbiamo DISTINGUERE DUE CASI !!!

$$\boxed{(a-5)x=2}$$

↙ ↘

$\boxed{1°\ caso:\ se\ \ a-5\neq 0}$, ossia $a\neq 5$,

possiamo dividere per $(a-5)$ e ricavare

$$x=\frac{2}{a-5}$$

$\boxed{2°\ caso:\ se\ \ a-5=0}$, ossia $a=5$,

NON possiamo isolare *x*;
siamo BLOCCATI al passaggio $(a-5)x=2$
che diventa, nella fattispecie,
$(5-5)\cdot x=2$.
Perciò, nel caso particolare $a=5$,
la nostra equazione si riduce a
$0\cdot x=2$
IMPOSSIBILE (*non esiste nessun numero il quale, moltiplicato per* 0, *dia come risultato* 2)

- Facciamo una verifica: l’equazione iniziale $ax-2=5x$, cosa diventa nel caso particolare $a=5$?
Diventa $5x-2=5x$ ossia $\cancel{5x}-2=\cancel{5x}$; $-2=0$ IMPOSSIBILE.

- Vediamo la verifica per un qualunque caso “normale”, ad esempio il caso $a=3$. Si ha
$3x-2=5x;\ -2x=2;\ x=\boxed{-1}$ … e -1 è proprio il valore assunto dalla frazione $\frac{2}{a-5}$ quando $a=3$.

2) $\dfrac{m(mx-1)-x}{3}=1$

$m(mx-1)-x=3; \quad m^2x-m-x=3; \quad m^2x-x=m+3; \quad (m^2-1)x=m+3$

$$\boxed{(m+1)(m-1)x=m+3}$$

Se $(m+1)(m-1)\neq 0$, ossia $m\neq -1$ e $m\neq +1$, brevemente: $m\neq \pm 1$
(un prodotto è diverso da zero quando lo sono tutti i suoi fattori; è uguale a zero quando si annulla anche un solo fattore), potremo dividere per $(m+1)(m-1)$ ottenendo $x=\dfrac{m+3}{(m+1)(m-1)}$

- Se $m=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=4$ *imposs.*
- Se $m=-1$ l'equazione diventa $0\cdot x=2$ *imposs.*

3) $\dfrac{1}{3}ax+x-\dfrac{2}{3}=\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{6}b$

$\dfrac{2ax+6x-4}{\cancel{6}}=\dfrac{3ax-b}{\cancel{6}}; \quad 2ax-3ax+6x=-b+4; \quad -ax+6x=-b+4; \quad ax-6x=b-4$

$$\boxed{(a-6)x=b-4}$$

NOTA ♥ **$0\cdot x=$ un numero diverso da zero IMPOSSIBILITA'**
$0\cdot x=0$ INDETERMINAZIONE (infinite soluzioni)

Se $a-6\neq 0$, ossia $a\neq 6$, $x=\dfrac{b-4}{a-6}$

Se $a=6$ l'equazione diventa

$0\cdot x=b-4$ $\left\langle \begin{array}{l} \textit{impossibile se } b-4\neq 0, \textit{ ossia } b\neq 4 \\ \textit{indeterminata } (0\cdot x=0) \textit{ se } b=4 \end{array}\right.$

NOTA

4) $3(px-4)-q=0$

$3px-12-q=0$

$$\boxed{3px=q+12}$$

Se $3p\neq 0$, ossia $p\neq 0$: $x=\dfrac{q+12}{3p}$

Se $p=0$ l'equazione diventa $3\cdot 0\cdot x=q+12$

$0\cdot x=q+12$ $\left\langle \begin{array}{l} \textit{imposs. se } q+12\neq 0, \textit{ ossia } q\neq -12 \\ \textit{indet. se } q=-12 \end{array}\right.$

5) $a(x-1)+5=x+b$

$ax-a+5=x+b; \quad ax-x=a+b-5$

$$\boxed{(a-1)x=a+b-5}$$

Se $a-1\neq 0$, ossia $a\neq 1$, $x=\dfrac{a+b-5}{a-1}$

Se $a=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=1+b-5$

$0\cdot x=b-4$ $\left\langle \begin{array}{l} \textit{impossibile se } b\neq 4 \\ \textit{indeterminata se } b=4 \end{array}\right.$

6) $(a-b)^2x-1=a+b(bx+1)$

$a^2x-2abx\cancel{+b^2x}-1=a+\cancel{b^2x}+b; \quad a^2x-2abx=a+b+1$

$$\boxed{a(a-2b)x=a+b+1}$$

Se $a(a-2b)\neq 0$, ossia $a\neq 0 \wedge a\neq 2b$, $x=\dfrac{a+b+1}{a(a-2b)}$

- Se $a=0$ l'equazione diventa $0\cdot x=b+1$ $\left\langle \begin{array}{l} \textit{imposs. se } b\neq -1 \\ \textit{indet. se } b=-1 \end{array}\right.$
- Se $a=2b$ l'equazione diventa $0\cdot x=2b+b+1$, quindi

$0\cdot x=3b+1$ $\left\langle \begin{array}{l} \textit{imposs. se } b\neq -\frac{1}{3} \\ \textit{indet. se } b=-\frac{1}{3} \textit{ perciò } a=2b=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$

7) $x\left(a^3+1\right)-a^2\left(3x+b\right)=a-x\left(2a-1\right)$

$$a^3x\cancel{+x}-3a^2x-a^2b=a-2ax\cancel{+x}$$

$$\boxed{a^3x-3a^2x-a^2b=a-2ax}$$

Si osserva a questo punto che l'equazione è semplificabile per a !
Ora, SEMPLIFICARE equivale a DIVIDERE, e, di nuovo,

UNA DIVISIONE E' EFFETTUABILE SOLTANTO SE
IL NUMERO PER CUI SI INTENDE DIVIDERE E' DIVERSO DA ZERO!

Quindi dovremo DISTINGUERE DUE CASI:

Se $\boxed{a\neq 0}$ è possibile semplificare, ottenendo:

$$a^{\cancel{3}\,2}x-3a^{\cancel{2}}x-a^{\cancel{2}}b=\overset{1}{\cancel{a}}-2\cancel{a}x$$
$$a^2x-3ax-ab=1-2x$$

Se $\boxed{a=0}$ l'equazione diventa

$$0\cdot x-0\cdot x-0\cdot b=0-0\cdot x$$
$$0=0$$
INDETERMINATA

Proseguiamo ora, ponendoci nel caso $a\neq 0$, con l'equazione semplificata:

$$a^2x-3ax-ab=1-2x$$
$$a^2x-3ax+2x=ab+1$$
$$\left(a^2-3a+2\right)x=ab+1$$
$$\boxed{\left(a-1\right)\left(a-2\right)x=ab+1}$$

Se $\left(a-1\right)\left(a-2\right)\neq 0$,
cioè $\boxed{a\neq 1\wedge a\neq 2}$:

$$x=\frac{ab+1}{\left(a-1\right)\left(a-2\right)}$$

Se $\boxed{a=1}$ l'equazione diventa:

$$\left(1-1\right)\left(1-2\right)x=1\cdot b+1$$
$$0\cdot x=b+1\left\langle\begin{array}{l}\textit{impossibile se } b\neq -1\\ \textit{indeterminata se } b=-1\end{array}\right.$$

Se $\boxed{a=2}$ l'equazione diventa:

$$\left(2-1\right)\left(2-2\right)x=2b+1$$
$$0\cdot x=2b+1\left\langle\begin{array}{l}\textit{impossibile se } b\neq -\frac{1}{2}\\ \textit{indeterminata se } b=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

IN DEFINITIVA,
i CASI DI INDETERMINAZIONE sono:

- $a=0$, *b qualsiasi (infinite equazioni)*
- $a=1,\ \ b=-1$
- $a=2,\ \ b=-\frac{1}{2}$

mentre i CASI DI IMPOSSIBILITA' sono:

- $a=1,\ \ b\neq -1$ (*infinite equazioni*)
- $a=2,\ \ b\neq -\frac{1}{2}$ (*infinite equazioni*)

Per esercizio, dai, riprendi l'equazione iniziale

$$x\left(a^3+1\right)-a^2\left(3x+b\right)=a-x\left(2a-1\right)$$

e …

- *va' a vedere cosa diventa nel caso* $a=1, b=-1$*: fatti i vari calcoli e passaggi, troverai un'equazione INDETERMINATA.*
- *Fai lo stesso con* $a=1, b=2$*: troverai un'equazione IMPOSSIBILE.*
- *Fai lo stesso con* $a=3, b=4$*: troverai un'equazione con una e una sola soluzione, data da*

$$x=\left[\frac{ab+1}{\left(a-1\right)\left(a-2\right)}\right]_{a=3,\,b=4}=$$
$$=\frac{3\cdot 4+1}{\left(3-1\right)\left(3-2\right)}=\frac{12+1}{2\cdot 1}=\frac{13}{2}$$