SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON DISCUSSIONE

OSSERVAZIONE METODOLOGICA

Di fronte all'equazione letterale (tanto per fare un esempio) $(k-2)x = m-3$,

si potrebbe anche dividere "brutalmente" per $(k-2)$, ottenendo $x = \dfrac{m-3}{k-2}$,

per ragionare poi sulla **frazione** ottenuta, domandandosi per quali valori di k e di m essa "salta" perché risulta

- impossibile (denominatore nullo, numeratore non nullo)
- oppure indeterminata (denom. e num. entrambi nulli).

♥ $\dfrac{\textbf{numero diverso da zero}}{\mathbf{0}}$ **= fraz. IMPOSSIBILE**
$\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **= frazione INDETERMINATA**

Il ragionamento sull'*equazione* (con la distinzione: determinata, indeterminata, impossibile) verrebbe allora sostituito da un ragionamento sulla *frazione*. Si farebbe, in pratica, così:

$(k-2)x = m-3;$

$x = \dfrac{m-3}{k-2}$ se $k \neq 2$; con $k = 2$ la frazione diventa $x = \dfrac{m-3}{0}$ che è $\left\langle \begin{array}{l} \text{indet.} \left(\dfrac{0}{0}\right) \text{ con } m = 3 \\ \text{imposs. con } m \neq 3 \end{array} \right.$

In questo modo, le conclusioni sarebbero identiche a quelle che si possono trarre ragionando sull'equazione, perché, se noi mettiamo a confronto l'equazione $ax = b$ e la frazione $x = \dfrac{b}{a}$, vediamo che

♪ l'etichetta di "indeterminazione" si appiccica *tanto* all'equazione, *quanto* alla frazione, nel caso $a = b = 0$
♫ e l'etichetta di "impossibilità" si appiccica *tanto* all'equazione, *quanto* alla frazione, nel caso $a = 0,\ b \neq 0$

A parere di chi scrive, il ragionamento "sull'equazione" è più lineare e diretto, e quindi preferibile.

D'altronde, per qual motivo una frazione del tipo $\dfrac{\textit{numero diverso da zero}}{0}$ è considerata "IMPOSSIBILE"?
Il motivo è che tale frazione esprime (frazione = divisione = operazione inversa della moltiplicazione) la ricerca di un numero x, tale che $x \cdot 0 = \textit{numero diverso da zero}$; e tale **equazione** è *impossibile*.

Cose analoghe si potrebbero dire sull'indeterminazione.
Dunque sono sempre le **equazioni**, più che le frazioni, il FONDAMENTO del pensiero, in questi contesti.
Tuttavia anche il ragionamento "sulla frazione" può avere i suoi vantaggi; se non altro, vantaggi di brevità.

1) Con $m = -4$ si trova l'equazione $-4(1+x) = 2(1-4)$ che ha per soluzione $x = \dfrac{1}{2}$.
Con $m = 1,\ m = 3,\ m = 0$ si trova rispettivamente $x = 3,\ x = 5/3$, equazione impossibile.
Risolvendo e discutendo l'equazione generale si ottiene $x = \dfrac{m+2}{m}$ $(m \neq 0)$, e impossibilità con $m = 0$.

$$\left[\frac{m+2}{m}\right]_{m=-4} = \frac{1}{2},\quad \left[\frac{m+2}{m}\right]_{m=1} = 3,\quad \left[\frac{m+2}{m}\right]_{m=3} = \frac{5}{3},\quad \left[\frac{m+2}{m}\right]_{m=0} = \textit{impossibile}$$

2) Risolvendo e discutendo l'equazione generale si ottiene $x = \dfrac{k^2}{k+2}$ $(k \neq -2;\ \textit{con } k = -2,\ \textit{imposs.})$, e:

$$\left[\frac{k^2}{k+2}\right]_{k=2} = 1,\quad \left[\frac{k^2}{k+2}\right]_{k=1} = \frac{1}{3},\quad \left[\frac{k^2}{k+2}\right]_{k=0} = 0,\quad \left[\frac{k^2}{k+2}\right]_{k=-1} = 1,\quad \left[\frac{k^2}{k+2}\right]_{k=-2} = \textit{impossibile}$$

3) $x = \dfrac{2a+1}{a+2}$ $(a \neq -2)$ 4) $x = \dfrac{2q-p}{2-p} = \dfrac{p-2q}{p-2}$ $(p \neq 2)$

5) a) $x = \dfrac{1}{a}$ $(a \neq 0)$; *con* $a = 0$ *è imposs.* b) $x = 1$ $(a \neq 0)$; *con* $a = 0$ *è indet.*

c) $x = \dfrac{a+1}{a}$ $(a \neq 0)$; *con* $a = 0$ *è imposs.* d) $x = -\dfrac{n}{m}$ $(m \neq 0)$; *con* $m = 0$ *è*: $\left\langle \begin{array}{l} \textit{imposs. se } n \neq 0 \\ \textit{indet. se } n = 0 \end{array} \right.$

e) $x = \dfrac{a+2}{2}$. L'eq. non è mai imposs. o indet. f) $x = \dfrac{b+2}{a}$ $(a \neq 0)$; *con* $a = 0$ *è*: $\left\langle \begin{array}{l} \textit{imposs. se } b \neq -2 \\ \textit{indet. se } b = -2 \end{array} \right.$

6) $Se\ m \neq 3: x = \dfrac{5m}{m-3};\ se\ m = 3\ è\ imposs.$

7) $x = \dfrac{8}{a+4}\ (a \neq -4);\ con\ a = -4,\ imposs.$ 8) $x = \dfrac{1-2k}{1-4k} = \dfrac{2k-1}{4k-1}\ \left(k \neq \dfrac{1}{4}\right);\ con\ k = \dfrac{1}{4},\ imposs.$

9) $x = \dfrac{5b}{b+1}\ (b \neq -1);\ con\ b = -1,\ imposs.$ 10) $x = \dfrac{c+3}{c-3}\ (c \neq 3);\ con\ c = 3,\ imposs.$

11) $Se\ a \neq -3: x = \dfrac{5b+1}{a+3};\ se\ a = -3 \wedge b \neq -\dfrac{1}{5}: imposss.;\ se\ a = -3 \wedge b = -\dfrac{1}{5}: indet.$

12) $x = \dfrac{a-4}{b-8}\ (b \neq 8);\ con\ b = 8: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ a \neq 4 \\ indet.\ se\ a = 4 \end{array} \right.$ 13) $x = \dfrac{n-4}{p+1}\ (p \neq -1);\ con\ p = -1: \left\langle \begin{array}{l} se\ n \neq 4\ imposs. \\ se\ n = 4\ indet. \end{array} \right.$

14) $x = \dfrac{3a-1}{3b}\ (b \neq 0);\ se\ b = 0: \left\langle \begin{array}{l} con\ a \neq \dfrac{1}{3},\ imposs. \\ con\ a = \dfrac{1}{3},\ indet. \end{array} \right.$ 15) $x = \dfrac{2q}{(m-2)^2}\ (m \neq 2);\ con\ m = 2: \left\langle \begin{array}{l} q \neq 0: imposs. \\ q = 0: indet. \end{array} \right.$

16) $Se\ p \neq 1: x = \dfrac{p+q-5}{p-1};\ se\ p = 1: \left\langle \begin{array}{l} q \neq 4: imposs. \\ q = 4: indet. \end{array} \right.$

17) $x = \dfrac{a-b-1}{b}\ (b \neq 0);\ con\ b = 0: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ a \neq 1 \\ indet.\ se\ a = 1 \end{array} \right.$

18) $x = \dfrac{s-2p-1}{p-2}\ (p \neq 2);\ con\ p = 2: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ s \neq 5 \\ indet.\ se\ s = 5 \end{array} \right.$

19) $x = \dfrac{a-m}{m-2}\ (m \neq 2);\ con\ m = 2: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ a \neq 2 \\ indet.\ se\ a = 2 \end{array} \right.$

20) $x = \dfrac{pq+1}{p-10}\ (p \neq 10);\ con\ p = 10: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ q \neq -1/10 \\ indet.\ se\ q = -1/10 \end{array} \right.$

21) $x = \dfrac{a-b-2}{a+b}\ (a \neq -b);\ con\ a = -b: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ b \neq -1 \\ indet.\ se\ b = -1\ (quindi\ a = 1) \end{array} \right.$

22) $x = \dfrac{b+c}{b-c-1}\ (b \neq c+1);\ con\ b = c+1: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ c \neq -1/2 \\ indet.\ se\ c = -1/2\ \left(quindi\ b = 1/2\right) \end{array} \right.$

23) $Se\ k \neq 0: x = \dfrac{k+2h}{k};\ se\ k = 0: \left\langle \begin{array}{l} h \neq 0: imposs. \\ h = 0: indet. \end{array} \right.$

24) $x = \dfrac{m+n}{m}\ (m \neq 0);\ con\ m = 0: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ n \neq 0 \\ indet.\ se\ n = 0 \end{array} \right.$

25) $x = \dfrac{2h+k}{k-4}\ (k \neq 4);\ con\ k = 4: \left\langle \begin{array}{l} imp.\ se\ h \neq -2 \\ ind.\ se\ h = -2 \end{array} \right.$

26) $x = h+2\ (h \neq 2);\ con\ h = 2,\ indet.$ 27) $Se\ s \neq 0 \wedge s \neq 2: x = \dfrac{s+1}{s(s-2)};\ \begin{array}{l} se\ s = 0: imposs. \\ se\ s = 2: imposs. \end{array}$

28) $Se\ m \neq \pm 3: x = \dfrac{k+1}{(m+3)(m-3)};\ \begin{array}{l} se\ m = 3 \wedge k = -1: indet.;\ se\ m = 3 \wedge k \neq -1: imposs. \\ se\ m = -3 \wedge k = -1: indet.;\ se\ m = -3 \wedge k \neq -1: imposs. \end{array}$

29) $x = \dfrac{a-1}{a(a+1)}\ (a \neq 0,\ a \neq -1);\ con\ a = 0: imposs.;\ con\ a = -1: imposs.$

30) $x = \dfrac{2n}{(k+1)(k-1)}\ (k \neq \pm 1);\ con\ k = 1 \vee k = -1: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ n \neq 0 \\ indet.\ se\ n = 0 \end{array} \right.$

31) $x = \dfrac{2c+d+2}{2cd}\ \begin{pmatrix} c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{pmatrix};\ se\ c = 0: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ d \neq -2 \\ indet.\ se\ d = -2 \end{array} \right.;\ se\ d = 0: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ c \neq -1 \\ indet.\ se\ c = -1 \end{array} \right.$

32) $x = \dfrac{rs+2}{r^2(r-1)}\ (r \neq 0,\ r \neq 1);\ con\ r = 0: imposs.;\ con\ r = 1: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ s \neq -2 \\ indet.\ se\ s = -2 \end{array} \right.$

33) $x = \dfrac{a+2b+3}{4ab}\ (a \neq 0, b \neq 0);\ con\ a = 0: \left\langle \begin{array}{l} imp.\ se\ b \neq -3/2 \\ ind.\ se\ b = -3/2 \end{array} \right.;\ con\ b = 0: \left\langle \begin{array}{l} imp.\ se\ a \neq -3 \\ ind.\ se\ a = -3 \end{array} \right.$

34) $Se\ k \neq 1: x = \frac{k}{(k-1)^2};\ se\ k = 1: imposs.$

35) $Se\ a \neq 3 \wedge a \neq -2: x = \frac{a+2b}{(a-3)(a+2)};$ $se\ a = 3 \wedge b = -3/2: indet.;\ se\ a = 3 \wedge b \neq -3/2: imposs.$ $se\ a = -2 \wedge b = 1: indet.;\ se\ a = -2 \wedge b \neq 1: imposs.$

36) $Se\ a \neq 1 \wedge b \neq 2: x = \frac{a+b}{(a-1)(b-2)};$ $se\ a = 1 \wedge b = -1: indet.;\ se\ a = 1 \wedge b \neq -1: imposs.;$ $se\ b = 2 \wedge a = -2: indet.;\ se\ b = 2 \wedge a \neq -2: imposs.$

37) $Se\ p \neq 0 \wedge q \neq 0: x = \frac{2p-1}{pq};\ se\ p = 0: imposs.;\ se\ q = 0 \wedge p \neq \frac{1}{2}: imposs.;\ se\ q = 0 \wedge p = \frac{1}{2}: indet.$

38) $Se\ m \neq 0: x = m+1;\ se\ m = 0: indet.$ 39) $Se\ a \neq 5: x = a+5;\ se\ a = 5: indet.$

40) $Se\ b \neq 0 \wedge b \neq 2: x = \frac{b}{b-2};\ se\ b = 0: indet.;\ se\ b = 2: imposs.$

41) $12a^2 - 7a + 1 = 12a^2 - 4a - 3a + 1 = \ldots$ $Se\ a \neq \frac{1}{4} \wedge a \neq \frac{1}{3}: x = \frac{4a+1}{3a-1};\ se\ a = \frac{1}{4}: ind.;\ se\ a = \frac{1}{3}: imp.$

42) $Se\ b \neq 1: x = \frac{c-3}{b-1};\ se\ b = 1: \left\langle \begin{array}{l} c \neq 3: imposs. \\ c = 3: indet. \end{array} \right.$ 43) $Se\ n \neq 0: x = -\frac{1}{n};\ se\ n = 0: indet.$

44) $Se\ a \neq 0: x = \frac{a+b+2}{2a};\ se\ a = 0: \left\langle \begin{array}{l} b \neq -2: imposs. \\ b = -2: indet. \end{array} \right.$ 45) $Se\ b \neq -3a: x = \frac{3}{3a+b};\ se\ b = -3a: imposs.$

46) $Se\ a \neq 5b: x = \frac{2a+b-11}{a-5b};\ se\ a = 5b: \left\langle \begin{array}{l} indet.\ se\ b = 1\ (e\ quindi\ a = 5) \\ imposs.\ se\ b \neq 1 \end{array} \right.$

47) $Se\ c \neq \frac{2}{3}d: x = \frac{c+d+1}{3c-2d};\ se\ c = \frac{2}{3}d: \left\langle \begin{array}{l} indet.\ se\ d = -3/5\ (e\ quindi\ c = -2/5) \\ imposs.\ se\ d \neq -3/5 \end{array} \right.$

48) $Se\ a \neq 0 \wedge a \neq b: x = \frac{a+b+6}{a(a-b)};$ $se\ a = 0 \wedge b = -6: indet.;\ se\ a = 0 \wedge b \neq -6: imposs.$ $se\ a = b = -3: indet.;\ se\ a = b \neq -3: imposs.$

49) $Se\ a \neq b+1: x = \frac{a+b}{a-b-1};\ se\ a = b+1: \left\langle \begin{array}{l} indet.\ se\ b = -1/2\ (e\ quindi\ a = 1/2) \\ imposs.\ se\ b \neq -1/2 \end{array} \right.$

50) $x = \frac{p-q-1}{p+q-1}\ (q \neq 1-p);\ se\ q = 1-p: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ con\ p \neq 1 \\ indet.\ con\ p = 1\ (\rightarrow q = 0) \end{array} \right.$

51) $x = \frac{b-2}{b-2c}\ (b \neq 2c);\ con\ b = 2c: \left\langle \begin{array}{l} imposs.\ se\ c \neq 1 \\ indet.\ se\ c = 1\ (\rightarrow b = 2) \end{array} \right.$

52) $Se\ a \neq 3b: x = a-3b;\ se\ a = 3b: indet.$

53) $Se\ b \neq -2a-1: x = \frac{2a-b+1}{2a+b+1};\ se\ b = -2a-1: \left\langle \begin{array}{l} indet.\ se\ a = -1/2\ (e\ quindi\ b = 0) \\ imposs.\ se\ a \neq -1/2 \end{array} \right.$

54) $Se\ b \neq 0: x = \frac{a+b-c}{3b^2};\ se\ b = 0: \left\langle \begin{array}{l} indet.\ se\ a = c \\ imposs.\ se\ a \neq c \end{array} \right.$

55) $Se\ r \neq -s: x = \frac{r-s}{r+s};\ se\ r = -s \neq 0: imposs;\ se\ r = 0 \wedge s = 0: indet.$

56) a) La soluzione è $x = \frac{k-3}{k-5}$ $(k \neq 5)$ ed è uguale a 2 se $\frac{k-3}{k-5} = 2;\ k-3 = 2k-10;\ k = 7$.
Oppure: $k(x-1)+3 = 5x$ ha per soluzione $x = 2$ se e solo se, sostituendo 2 al posto di *x*, si ottiene un'uguaglianza vera; dunque $k(2-1)+3 = 5 \cdot 2;\ k+3 = 10;\ k = 7$.
b) $k = 3$ c) $k = 9/2$ d) imposs.: per nessun valore di *k* questa equaz. può avere come soluz. $x = 1$

57) a) $m = 1/3$ b) $m = 1$ c) $m = 1/2$ d) imposs. 58) a) $h = -1/2$ b) $h = 1$ c) imposs. d) $h = -5$

59) $a = -1, b = -2$ 60) E' imposs. con $m = 2$. Non può mai essere indeterminata, per nessun valore di *m*.

61) a) Non può mai essere imposs., per nessun valore di *a* b) E' indet. con $a = 0$ c) Con $a = -1$ e $a = 0$

62) d) 63) c) 64) d) 65) a) 66) b) 67) Per $h = -1$; $x = -1$ 68) Per $m = 3$; $x = 2$ e $x = 1$.

69) Ad esempio, $ax = a-4$ oppure $(a+4)x = a$

70) Ad esempio, $(a-3)x = (a-2)(a-1)$