

4. EQUAZIONI LETTERALI FRATTE

Sono quelle che, oltre a presentare il parametro, contengono almeno una volta l'incognita a denominatore.

Vediamo un **esempio**.

$$\square \frac{(a+1)x-2}{a^2x-6a^2-2ax+12a} + \frac{x-1}{ax-6a} = \frac{x+1}{ax-6a-2x+12}$$

Scomponiamo i denominatori e facciamo il denominatore comune:

$$\frac{(a+1)x-2}{a(a-2)(x-6)} + \frac{x-1}{a(x-6)} = \frac{x+1}{(a-2)(x-6)}$$

$$\frac{ax+x-2+(a-2)(x-1)}{a(a-2)(x-6)} = \frac{a(x+1)}{a(a-2)(x-6)} \quad x \neq 6 \quad (*)$$

$$\frac{ax+x-2+ax-a-2x+2}{a(a-2)(x-6)} = \frac{ax+a}{a(a-2)(x-6)} \quad a \neq 0 \quad a \neq 2 \quad (**)$$

$$\cancel{ax} + \cancel{x} - 2 + \cancel{ax} - a - \cancel{2x} + 2 = \cancel{ax} + a$$

$$ax - x = a + a$$

$$(a-1)x = 2a$$

Se $a \neq 1$:

$$x = \frac{2a}{a-1}$$

Se $a = 1$:

$$0 \cdot x = 2 \quad \text{impossibile}$$

C'è a questo punto una "coda".

All'atto di spedir via il denominatore, noi avevamo scritto la "condizione di accettabilità"

$$x \neq 6.$$

Ora, in generale, la soluzione trovata $x = \frac{2a}{a-1}$

è, in effetti, diversa da 6;

tuttavia, può darsi che esista un valore del parametro a per il quale tale soluzione risulti proprio uguale a 6!

Se ciò accadesse, per quel valore di a l'equazione risulterebbe impossibile, in quanto dotata di soluzione non accettabile.

Si tratta quindi di andare a cercare quell'eventuale valore di a , impostando l'equazione

$$\frac{2a}{a-1} = 6$$

nella quale a fa da incognita.

$$\frac{2a}{a-1} = 6$$

$$\frac{2a}{\cancel{a-1}} = \frac{6(\cancel{a-1})}{\cancel{a-1}} \quad (a \neq 1)$$

$$2a = 6a - 6$$

$$-4a = -6$$

$$a = \frac{3}{2}$$

Ricapitoliamo:

- con $a = 0 \vee a = 2$ l'equazione non ha significato
- con $a = 1$ l'equazione è impossibile
- con $a = \frac{3}{2}$ l'equazione è impossibile (soluzione non accettabile)
- con $a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq \frac{3}{2}$ l'equazione ha 1 e 1 sola soluzione e precisamente $x = \frac{2a}{a-1}$

(*) ♥

La condizione riferita all'incognita

$$x \neq 6$$

è una

"CONDIZIONE DI ACCETTABILITA' "

e significa:

se alla fine dovesse capitare di trovare come soluzione $x = 6$, bisognerebbe scrivere:

"soluzione NON ACCETTABILE".

(**) ♥

Le condizioni riferite al parametro

$$a \neq 0, a \neq 2$$

hanno un significato

COMPLETAMENTE DIVERSO:

sono

"CONDIZIONI PRELIMINARI",

e significano:

al parametro a possiamo attribuire il valore che desideriamo, ma con due eccezioni:

non è lecito attribuire ad a né il valore 0 né il valore 2,

perché altrimenti si otterrebbe un'equazione priva di significato.

"Priva di significato"

non equivale affatto a "impossibile":

♪ un'equazione "impossibile" è un'equazione che ha senso affrontare e cercare di risolvere, ma che non ha soluzioni, come un albero senza frutti;

♪ di fronte ad un'equazione "priva di significato", invece, si rimane bloccati fin dall'inizio, perché ci si trova a che fare con una o più operazioni non eseguibili.

Facciamo una **verifica**.

Cosa diventa la nostra equazione nel caso particolare $a = \frac{3}{2}$?

Sostituiamo:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{3}{2}+1\right)x-2}{\frac{9}{4}x-\cancel{6}^3 \cdot \frac{9}{\cancel{4}^2}-\cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}}x+\cancel{12}^6 \cdot \frac{3}{\cancel{2}}} + \frac{x-1}{\frac{3}{2}x-\cancel{6}^3 \cdot \frac{3}{\cancel{2}}} = \frac{x+1}{\frac{3}{2}x-\cancel{6}^3 \cdot \frac{3}{\cancel{2}}-2x+12} \\ & \frac{\frac{5}{2}x-2}{\frac{9}{4}x-\frac{27}{2}-3x+18} + \frac{x-1}{\frac{3}{2}x-9} = \frac{x+1}{\frac{3}{2}x-9-2x+12} \\ & \frac{\frac{5x-4}{2}}{\frac{9x-54-12x+72}{4}} + \frac{x-1}{\frac{3x-18}{2}} = \frac{x+1}{\frac{3x-18-4x+24}{2}} \\ & \frac{\frac{5x-4}{2}}{\frac{-3x+18}{4}} + \frac{x-1}{\frac{3x-18}{2}} = \frac{x+1}{\frac{-x+6}{2}}; \quad \frac{5x-4}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{-3(x-6)} + (x-1) \cdot \frac{2}{3(x-6)} = (x+1) \cdot \frac{2}{-(x-6)}; \\ & -\frac{2(5x-4)}{3(x-6)} + \frac{2(x-1)}{3(x-6)} = -\frac{2(x+1)}{x-6}; \quad \frac{-10x+8+2x-2}{\cancel{3(x-6)}} = \frac{-6x-6}{\cancel{3(x-6)}} \quad (x \neq 6) \\ & -8x+6 = -6x-6; \quad -2x = -12; \quad x = 6 \text{ NON ACCETTABILE, come ci attendevamo} \end{aligned}$$

Un altro esempio:

$$\begin{aligned} \square \quad & \frac{1}{3(x+1)} + \frac{x+m}{m(x-4)(x+1)} = \frac{1}{m(x-4)} \\ & \frac{mx-4m+3x+3m}{3m(x-4)(x+1)} = \frac{3x+3}{3m(x-4)(x+1)} \quad m \neq 0, \quad x \neq 4, \quad x \neq -1 \\ & \cancel{mx-4m+3x+3m} = \cancel{3x+3} \\ & mx = m+3 \\ & x = \frac{m+3}{m} \quad (\text{ricordiamo che avevamo già posto come condizione preliminare } m \neq 0: \\ & \quad \text{con } m = 0 \text{ l'equazione sarebbe priva di significato}). \end{aligned}$$

La soluzione trovata $x = \frac{m+3}{m}$ in generale è accettabile;

non lo è, eccezionalmente, se risulta

$$\begin{aligned} \frac{m+3}{m} = 4; & \quad \text{oppure} \quad \frac{m+3}{m} = -1; \\ m+3 = 4m & \quad m+3 = -m \\ -3m = -3 & \quad 2m = -3 \\ m = 1 & \quad m = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

SCHEMA DI RICAPITOLAZIONE

Valori del parametro per cui l'equazione è:

Determinata	Impossibile	Indeterminata	Priva di significato
$\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$	$m = 1$ $m = -\frac{3}{2}$		$m = 0$

Consigliate
alcune verifiche,
MOLTO
istruttive!
Ad esempio, per:

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ m &= 2 \\ m &= -3/2 \\ m &= -3 \end{aligned}$$