

ALTRI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LETTERALI CON LETTERE A DENOMINATORE**Risolvi e discuti le equazioni seguenti:**

$$1) \frac{2}{a+1} + \frac{a-1}{x-1} = 1 \quad 2) \frac{x}{x-2} = 2 \cdot \frac{b}{b-3} \quad 3) \frac{x}{m} - \frac{2x-3}{2m} = \frac{x+1}{x-1} \quad 4) \frac{a}{x-a-2} = \frac{2}{x-1} \quad 5) \frac{x+a}{x+3} - \frac{x^2+3}{x^2+3x} = 0$$

Per le seguenti equazioni letterali, non è richiesta la discussione.**Si chiede di fare invece la verifica**, ossia, trovata la soluzione, di sostituirla al posto di x nell'equazione di partenza per controllare che l'uguaglianza sia, effettivamente, verificata.

$$6) \frac{2}{x^2-a^2} - \frac{x}{x+a} + \frac{x}{x-a} = 0 \quad 7) \frac{\frac{x}{q} - \frac{x}{p}}{x+1} = \frac{1}{pq} \quad 8) \frac{x}{x^2-x-6} - \frac{c}{x-3} = 0 \quad 9) \frac{\frac{k+3}{2} - 1}{\frac{x+3}{2}} + 1 = 0$$

$$10) \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \quad 11) \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{x-a-b} = a^{-1}b^{-1} \quad 12) \frac{a}{x^2+x} + \frac{b}{2x+2} = 3 \cdot \frac{bx}{2x^2+2x}$$

$$13) \frac{1 - \frac{1}{x} + b}{a-1} + 1 = 0 \quad 14) \frac{1}{ax-x-a+1} + \frac{1}{ax-x} + \frac{1}{x-x^2} = 0 \quad 15) \frac{a}{x^2+x-2} - \frac{b}{x^2-3x+2} = 0$$

$$16) \frac{2x+a}{2x-a} - \frac{2x-a}{2x+a} = \frac{x+1}{4x^2-a^2} \quad 17) \frac{x-3}{x+k-1} = \frac{x+3}{x-k+1} \quad 18) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{x}} = \frac{b}{a} \quad 19) \frac{a}{4x^2-4} - \frac{b}{8x+8} = 0$$

PROBLEMI CON DISCUSSIONE

- 20) Sia a un numero reale fissato.
Esiste un numero x tale che, addizionandogli a o moltiplicandolo per a , si ottenga il medesimo risultato?
In caso affermativo, stabilire il valore di x .
- 21) Sia a un numero reale non nullo fissato.
Determinare, qualora esista, il numero x tale che, dividendolo per a o diminuendolo di a , si ottenga lo stesso risultato.
- 22) Dati due numeri reali non nulli a e b ,
quale numero x bisogna sommare ai due termini della frazione a/b per ottenere la frazione b/a ?
- 23) Sia $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.
Quale numero occorre togliere a ciascuno dei due termini della frazione a/b per ottenere il quadrato di tale frazione?
- 24) Determina quel numero che aumenta di 1 unità se lo si moltiplica per m .
- 25) Sottraendo k da un numero, o dividendolo per k , si ottiene il medesimo risultato.
Di che numero si tratta?
- 26) Quale numero occorre addizionare ad entrambi i termini di una frazione a/b , affinché questa raddoppi?
- 27) Trovare due numeri sapendo che il rapporto fra il 1° e il 2° è r e la differenza fra il 1° e il 2° è d .
- 28) Trovare due numeri sapendo che la loro somma è s e il loro rapporto è r .

RISPOSTE

- 1) Perde significato con $a = -1$.
E' indeterminata con $a = 1$: in tal caso, ne sono soluzione tutti i valori di x , tranne $x = 1$.
Con $a \neq \pm 1$, è $x = a + 2$
- 2) Ha significato solo con $b \neq 3$. E' impossibile quando $b = -3$. Per $b \neq \pm 3$, è $x = \frac{4b}{b+3}$
- 3) Ha significato solo con $m \neq 0$. E' impossibile se $m = \frac{3}{2}$. Con $m \neq \frac{3}{2}$, $m \neq 0$ ha come soluz. $x = \frac{3+2m}{3-2m}$.
- 4) Si trova $x = -\frac{a+4}{a-2}$, sotto le condizioni $a \neq 2$, $a \neq 0$, $a \neq -1$. Con $a = 2$, $a = 0$, $a = -1$ l'equaz. è imposs.
- $$\left[\begin{array}{l} \text{La condizione di accettabilità } -\frac{a+4}{a-2} \neq a+2 \text{ equivale a} \\ -a-4 \neq a^2-4 \text{ (} a \neq 2 \text{); } a^2+a \neq 0; a(a+1) \neq 0 \text{ ossia } a \neq 0, a \neq -1 \end{array} \right]$$

5) $x = \frac{3}{a}$ ($a \neq 0, a \neq -1$). Con $a = 0 \vee a = -1$ l'equazione è impossibile.

6) $x = -\frac{1}{a}$ 7) $x = \frac{1}{p-q-1}$ 8) $x = \frac{2c}{1-c}$ 9) $x = -(k+6)$ 10) $x = abc$ 11) $x = 2(a+b)$ 12) $x = \frac{a}{b}$

13) $x = \frac{1}{a+b}$ 14) $x = \frac{a}{2}$ 15) $x = 2 \cdot \frac{a+b}{a-b}$ 16) $x = \frac{1}{8a-1}$ 17) $x = 0$ 18) $x = \frac{a-b}{2}$ 19) $x = \frac{2a+b}{b}$

20) Il numero x esiste, ed è $x = \frac{a}{a-1}$.

Fa eccezione però il caso $a = 1$. In questo caso il problema è impossibile: non c'è nessun numero x tale che addizionandogli 1 o moltiplicandolo per 1 si ottenga il medesimo risultato.

Facciamo la verifica? Ma sì, dà:

$$\frac{a}{a-1} \boxed{+a} = \frac{a+a(a-1)}{a-1} = \frac{\cancel{a} + a^2 - \cancel{a}}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}; \quad \frac{a}{a-1} \boxed{\cdot a} = \frac{a^2}{a-1} \text{ OK, stesso risultato.}$$

Ad es., nel caso $a = 3$, il numero x è $\left[\frac{a}{a-1}\right]_{a=3} = \frac{3}{2}$: e infatti $\frac{3}{2} + 3 = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2}$ e anche $\frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$

21) Il numero x in generale esiste, e vale $x = \frac{a^2}{a-1}$.

Soltanto nel caso particolare $a = 1$, il problema è impossibile.

22) $x = -(a+b)$. Se però $a = b$, allora il problema è indeterminato:

infatti, in questo caso particolare, ogni numero x è soluzione del problema, escluso soltanto $x = -b$.

23) Nel caso generale $a \neq \pm b$, il numero è $\frac{ab}{a+b}$.

Il problema è invece:

- indeterminato se $a = b$ (in questo caso, qualsiasi numero va bene tranne il numero b);
- impossibile se $a = -b$.

Verifica: $\frac{a - \frac{ab}{a+b}}{b - \frac{ab}{a+b}} = \frac{\frac{a(a+b) - ab}{a+b}}{\frac{b(a+b) - ab}{a+b}} = \frac{\frac{a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab}}{a+b}}{\frac{\cancel{ab} + b^2 - \cancel{ab}}{a+b}} = \frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{\cancel{a+b}}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$, OK

24) Il numero è $\frac{1}{m-1}$, purché sia $m \neq 1$. Con $m = 1$ il problema è impossibile.

25) Il problema ha senso solo per $k \neq 0$. La sua soluzione è il numero $\frac{k^2}{k-1}$, se $k \neq 1$. Con $k = 1$, è imposs.

26) Questo problema ha senso solo con $b \neq 0$. Il numero è $\frac{ab}{b-2a}$, se $b \neq 2a \wedge b \neq a$.

Dev'essere $b \neq a$ in quanto l'equazione risolvente è $\frac{a+x}{b+x} = 2 \cdot \frac{a}{b}$ e occorre porre la condizione

$$b+x \neq 0, x \neq -b \text{ da cui } \frac{ab}{b-2a} \neq -b, ab \neq -b(b-2a) \text{ ossia } a \neq -b+2a, b \neq a.$$

Qualora sia $b = 2a \vee b = a$ il problema è impossibile.

27) I due numeri sono $\frac{d}{r-1}$ e $\frac{rd}{r-1}$ rispettivamente, se $r \neq 1$.

Nel caso $r = 1$, se $d \neq 0$ il problema è impossibile mentre nel caso $d = 0$ è indeterminato, con l'avvertenza, in quest'ultimo caso, che tutte le coppie di numeri fra loro uguali ne sono soluzione, TRANNE la coppia $(0, 0)$ per la quale non ha senso il rapporto.

28) I due numeri sono $\frac{rs}{r+1}$ e $\frac{s}{r+1}$ rispettivamente, se $r \neq -1$.

Nel caso $r = -1$, se $s \neq 0$ il problema è impossibile mentre nel caso $s = 0$ è indeterminato, con l'avvertenza, in quest'ultimo caso, che tutte le coppie di numeri fra loro opposti ne sono soluzione, TRANNE la coppia $(0, 0)$ per la quale non ha senso il rapporto.