

3. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UN SISTEMA LINEARE IN DUE INCOGNITE

La si può effettuare isolando la y in entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

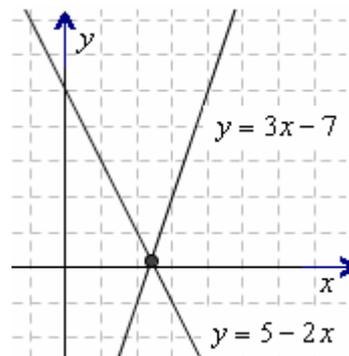
$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ y = 3x - 7 \end{cases}$$

Poi si tracciano, in uno stesso riferimento cartesiano, i grafici delle due funzioni così ottenute:

$$y = 5 - 2x, \quad y = 3x - 7$$

(nel nostro esempio, poiché le funzioni sono di 1° grado, si tratterà di due rette)

... per cercare infine la coppia (x, y) che appartiene ad *entrambi* i grafici.



In pratica, dunque, si va a prendere il PUNTO DI INTERSEZIONE fra i due grafici tracciati.

La x e la y di quel punto costituiranno la coppia $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ soluzione del sistema.

Nel nostro caso, graficamente non siamo in grado di stabilire quale sia il valore *esatto* di questa coppia (x, y) ; possiamo solo osservare che è $2 < x < 3$ e $0 < y < 1$ (con y molto più vicina a 0 che a 1).

In effetti, **di norma, queste risoluzioni grafiche ci permettono di approssimare la soluzione, piuttosto che di determinarla perfettamente.**

♥ L'interpretazione grafica può essere un'utile occasione per ribadire che (salvo rare eccezioni) una singola equazione in due incognite è verificata da INFINITE coppie (x, y) .

Consideriamo, ad esempio, la retta "in discesa", che "rappresenta" l'equazione $2x + y = 5$ ($y = 5 - 2x$).

Se nell'equazione $y = 5 - 2x$ noi poniamo, ad esempio, $x = 1$, otteniamo $y = 5 - 2 \cdot 1 = 3$;

bene, ciò significa che la coppia $x = 1, y = 3$ (brevemente: la coppia $(1, 3)$) è soluzione dell'equazione $y = 5 - 2x$ quindi anche della sua equivalente $2x + y = 5$ (controlliamo: $2 \cdot 1 + 3 = 5$ OK).

Dando poi a x altri valori possiamo determinare *altre* coppie (x, y) che rendono vera l'equazione $y = 5 - 2x$:

$$(0, 5); (2, 1); (3, -1); (10, -15); (-1, 7); \left(\frac{1}{2}, 4\right); (3, 7); (-2, 4); \dots$$

Tali infinite coppie (x, y) sono per l'appunto le coordinate degli infiniti punti che compongono la retta in discesa; mentre le coordinate (x, y) degli infiniti punti della retta in salita sono quelle coppie (x, y) che "vanno bene" per l'equazione $y = 3x - 7$ (o per la sua equivalente $3x - y = 7$).

Le coordinate del punto in cui le due rette si intersecano sono dunque quei valori $x = \dots, y = \dots$ per i quali sono verificate SIMULTANEAMENTE ENTRAMBE le equazioni in gioco.

□ E se le due rette fossero parallele? Vorrebbe dire che quel sistema è IMPOSSIBILE (1).

□ Se poi quelle due rette coincidessero, saremmo di fronte a un sistema INDETERMINATO, avente per soluzioni tutte le infinite coppie (x, y) che verificano una a piacere fra le equazioni in gioco (2).

(1) Il sistema

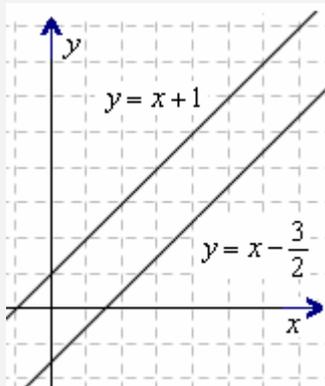
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

ed è

IMPOSSIBILE
(rette parallele).



Osserviamo che è verificata la condizione sufficiente di impossibilità

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}: \text{ è infatti } \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{3}$$

(2) Il sistema

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2y = 2x + 2 \quad (y = x + 1) \end{cases}$$

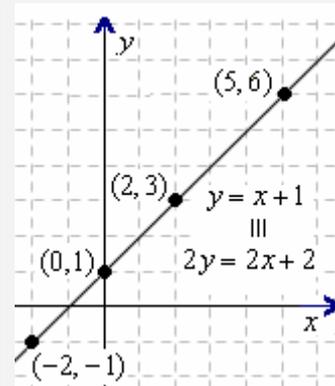
ed è INDETERMINATO
(rette coincidenti).

Qui è verificata la condizione sufficiente di indeterminazione

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Le soluzioni del sistema sono tutte le coppie (x, y) che corrispondono ai punti di una qualsiasi delle due rette:

$$(-2, -1); (0, 1); (2, 3); (5, 6); (2, 45); (3, 45); \dots$$

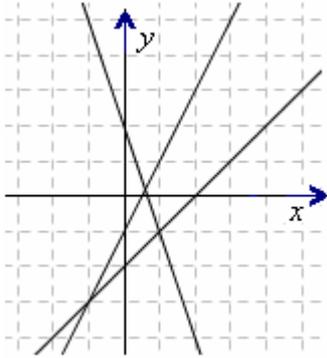


Supponiamo ora che il sistema abbia 2 incognite, ma 3 equazioni: ad esempio

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - 3x \\ y = x - 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Già abbiamo visto che, **di norma, sistemi di questo tipo sono impossibili;** ma che **potrebbero però, eccezionalmente, avere soluzione o addirittura risultare indeterminati.**

In effetti, qui le rette in gioco sono 3:

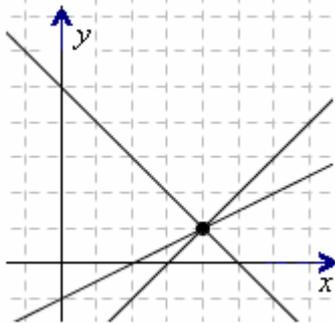


nel nostro caso, le tre rette NON passano tutte per uno stesso punto, situazione che è poi la più “ordinaria” per 3 rette su un piano, quindi non esiste una coppia (x, y) che soddisfi simultaneamente tutte e tre le equazioni considerate.

Invece il sistema che segue:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - x \\ y = x - 3 \\ y = \frac{x-2}{2} = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

è, eccezionalmente, determinato, in quanto le tre rette passano tutte per uno stesso punto, le cui coordinate $x = 4$, $y = 1$ costituiscono la soluzione del sistema.



ESERCIZI

Risolvi, sia graficamente che algebricamente, i sistemi che seguono:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases} & \quad 2) \begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ 3x + y = 4 \end{cases} & \quad 3) \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases} & \quad 4) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 4y = -1 \end{cases} & \quad 5) \begin{cases} x - 5y = 1 \\ 5x - y = 1/5 \end{cases} & \quad 6) \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \\ 7) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} & \quad 8) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} & \quad 9) \begin{cases} 4x + y = 7 \\ x - 2y + 5 = 0 \\ 2x + 0,5y = 3,5 \end{cases} & \quad 10) \begin{cases} x + y = 4 \\ 0,25x + 0,25y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} & \quad 11) \begin{cases} 0,125x - 0,125y = 0,25 \\ 0,5x = 1 + 0,5y \\ y + 2 = x \end{cases} \end{aligned}$$

RISPOSTE

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} & \quad 2) \text{indet.} : \begin{cases} x = x \\ y = 4 - 3x \end{cases} & \quad 3) \text{imposs.} & \quad 4) \begin{cases} x = 1 \\ y = -1/2 \end{cases} & \quad 5) \begin{cases} x = 0 \\ y = -1/5 \end{cases} & \quad 6) \text{imposs.} \\ 7) \text{imposs.} & \quad 8) \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} & \quad 9) \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} & \quad 10) \text{imposs.} & \quad 11) \text{indet.} : \begin{cases} x = x \\ y = x - 2 \end{cases} \end{aligned}$$